Erzwingung von Teilstrukturen in Graphen durch globale Parameter

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Christof Rempel
aus Hamburg

Hamburg
2001

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. T. Andreae

und Prof. Dr. R. Diestel

Hamburg, den 27. April 2001

Prof. Dr. U. Eckhardt
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Um zu verstehen, wodurch in einem Graphen eine reichhaltige Struktur erzeugt wird, fragt man im Rahmen der extremalen Graphentheorie, welchen Wert Graphenparameter – wie zum Beispiel der Durchschnittsgrad oder die chromatische Zahl – mindestens annehmen müssen, um diese Struktur zu erzwingen.

Da jeder Graph in einem vollständigen Graphen der gleichen Ordnung enthalten ist, ist es von besonderem Interesse, wann ein Graph einen vollständigen Graphen als Teilgraph oder als Minor enthält. Während es gelungen ist, den dafür erforderlichen Durchschnittsgrad zu bestimmen, gehört die Frage, welchen Wert die chromatische Zahl $\chi(G)$ mindestens annehmen muß, um einen großen K^r-Minor in G zu erzwingen (insbesondere, ob hier die Hadwiger Vermutung zutrifft, also dazu $\chi(G) \geq r$ ausreicht), zu den großen ungelösten Problemen der Graphentheorie.

Da ein Graph mit chromatischer Zahl k einen Teilgraphen mit Durchschnittsgrad mindestens $k-1$ enthält, hat man über den Umweg des Durchschnittsgrades auch eine Aussage darüber, welche chromatische Zahl ausreicht, um einen K^r-Minor zu erzwingen. Nach einem Satz von Kostochka und Thomason (siehe [10]), reicht ein Durchschnittsgrad von $cr\sqrt{\log r}$ (mit einer Konstanten c) aus, um einen K^r-Minor zu erzwingen. Also genügt ebenso eine chromatische Zahl von $cr\sqrt{\log r}+1$. Da das Ergebnis von Kostochka und Thomason von der Größenordnung bestmöglich ist, kann man auf diese Weise die Schranke für die chromatische Zahl nicht verbessern. Stimmt die Hadwiger Vermutung, so hätte man eine Eigenschaft aus der chromatischen Zahl abgeleitet, die sich nicht über den Umweg des Durchschnittsgrades herleiten läßt.

Dies führt somit zu dem allgemeineren Problem, ob wir Strukturen finden können, die jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens k enthält, während ein Graph mit einem Durchschnittsgrad der Größenordnung k sie nicht enthalten muß. In Kapitel 2 geben wir eine Verallgemeinerung des Zusammenhangsbegriffs, den f-Zusammenhang. Dieser berücksichtigt nicht nur, wie groß eine trennende Eckenmenge in einem Graphen sein muß, sondern auch deren Abhängigkeit von der Größe der dadurch verursachten Trennung. Der f-Zusammenhang hängt von einer Funktion $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ ab. Je stärker f wächst, um so größer ist der Zusammenhang im Graphen. Die Eigenschaft, einen f-zusammenhängenden Teilgraphen zu besitzen (wobei die Funktion f dabei noch bestimmt werden muß), ist nun ein potentieller Kandidat für eine Struktur, die allein aus der chromatischen Zahl abgeleitet werden kann.

Nach einem Satz von Mader (siehe [10]), impliziert ein Durchschnittsgrad von $4k$ einen k-zusammenhängenden Teilgraph. Als Entsprechung geben wir eine Funktion f an, für die jeder Graph mit ausreichendem Durchschnittsgrad einen f-zusammenhängenden Teilgraphen enthält. Wächst f zu stark, ist weder durch die Vorgabe eines Durchschnittsgrades noch der chromatischen Zahl ein f-zusammenhängender Teilgraph zu erzwingen. Mit der angegebenen Schranke, für welche Funktionen f dies nicht möglich ist, stellt sich heraus, daß hier dem Vorhaben, eine Eigenschaft zu finden, die sich nur aus der chromatischen Zahl, nicht aber über den Umweg des Durchschnittsgrades, ableiten läßt, sehr enge Grenzen gesetzt sind.

Welche Parameter eignen sich neben dem Durchschnittsgrad und der chromatischen Zahl dazu, einen K^r-Minor zu erzwingen? Die direkte Konsequenz einer hohen Taillenweite ist zunächst eine simple lokale Struktur (nämlich Wälder). Daher scheint die Taillenweite ein schlechter Kandidat zu sein. Überraschenderweise konnte Thomassen [21] jedoch zeigen, daß jeder Graph mit hinreichend großer Taillenweite und mit Minimalgrad mindestens 3 einen K^r-Minor enthält. In Kapitel 3 werden wir die Schranke für die Taillenweite wesentlich verbessern, so daß sie von der Größenordnung optimal ist. Mit der verbesserten Schranke zeigt sich die Taillenweite als durchaus geeigneter Graphenparameter, um einen K^r-Minor zu erzwingen.

Dieses Resultat über die Erzwingung vollständiger Minoren durch hohe Taillenweite ist vielleicht das Hauptergebnis der Arbeit. Dennoch ist die darin angegebene Schranke nicht scharf. Die genauere Untersuchung des Beweises führt direkt zu einem Problem über dominierende Mengen. Eine Variante von dominierenden Mengen und unabhängigen Mengen sind (Distanz-) k-dominierende und q-unabhängige Mengen. Klostermeyer [14] untersucht die Fragestellung, welche Graphen Mengen besitzen, die sowohl k-dominierend als auch q-unabhängig sind (mit $k < q$). Insbesondere stellt er die Frage nach der Komplexität dieses Problems und zeigt für einen Spezialfall, daß es NP-vollständig ist. Könnte man Werte $k < q$ finden, für die man derartige Mengen in einem Graphen garantieren könnte, so würde dies die Taillenweite-Schranke verbessern. Wie wir aber in Kapitel 4 zeigen werden, ist das Problem auch im allgemeinen Fall NP-vollständig.

Zum Schluß möchte ich mich herzlich bei Prof. Reinhard Diestel für die aufmunternde Betreuung bedanken.

1.1 Bezeichnungen

Spezielle Definitionen, die nur in einem Kapitel gebraucht werden, werden erst dort geliefert. Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Lehrbuch von Diestel [10] und geben hier kurz die für uns wichtigsten Definitionen wieder.

Graphen werden immer als endlich, schlingenfrei und ohne Mehrfachkanten vorausgesetzt. Um Formulierungen abzukürzen, werden wir (wenn klar bleibt, was gemeint ist) G auch mit $V(G)$ und $E(G)$ gleichsetzen. Die Ordnung von G ist die Anzahl der Ecken von G und wird mit $|G|$ abgekürzt. Weiter ist $||G|| = |E(G)|$.

Den Abstand zwischen zwei Ecken x, y in einem Graphen G, also die Länge des kürzesten Weges zwischen x und y, bezeichnen wir mit $d(x, y)$ und für eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq V(G)$ setzen wir $d(A, x) = d(x, A) := \min\{d(x, y) : y \in A\}$. Für eine Eckenmenge $S \subseteq V(G)$ bezeichnen wir die Menge der Nachbarn von S in $G \setminus S$ mit $N(S)$.

Außerdem sei noch an folgende Abkürzungen von Graphenparametern erinnert: chromatische Zahl – $\chi(G)$, Durchschnittsgrad – $d(G)$, Minimalgrad – $\delta(G)$, Maximalgrad – $\Delta(G)$ und Taillenweite – $g(G)$.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beinhalten die Zahl 0. Zuletzt bezeichne ln den natürlichen Logarithmus zur Basis e und log den Logarithmus zur Basis 2.

Kapitel 2

Globaler Zusammenhang

Als ein Maß von globalem Zusammenhang kann man die Größe einer trennenden Eckenmenge auffassen, die man braucht, um einen Graphen in große Teile zu zerlegen. Definieren wir als Trennung in einem Graphen G ein Paar von Eckenmengen (A, B) mit $A \cup B = V(G)$, so daß der Schnitt $A \cap B$ die Mengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ voneinander trennt, so ist also die Frage, wie $|A \cap B|$ von $\min\{|A \setminus B|, |B \setminus A|\}$ abhängt.

Wir definieren daher für eine Funktion $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ den Begriff des f-Zusammenhangs wie folgt: Ein Graph G ist f-zusammenhängend, wenn für jede Trennung (A, B) eines Graphen G mit $0 < |A \setminus B| \leq |B \setminus A|$ die Beziehung $|A \cap B| \geq f(|A \setminus B|)$ gilt. Als Erweiterung lassen wir auch Funktionen $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zu. Ein Graph ist genau dann k-zusammenhängend, wenn er f-zusammenhängend mit der Funktion $f(n) = k$ $(n \in \mathbb{N})$ ist. Den Begriff des f-Zusammenhangs können wir auch mit Nachbarschaften ausdrücken. Ist $A \subseteq V(G)$ eine Eckenmenge A in einem Graphen G, so definieren wir $\bar{N}(A) = \{x \in V(G) \setminus A : x \text{ ist nicht mit } A \text{ benachbart}\}$.

Lemma 2.1. *G ist genau dann f-zusammenhängend, wenn für jede nichtleere Eckenmenge $S \subset V(G)$ mit $|S| \leq |\bar{N}(S)|$ die Ungleichung $|N(S)| \geq f(|S|)$ erfüllt ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Die Mengen $S \cup N(S)$ und $(V(G) \setminus S)$ bilden eine Trennung, für die $S \cup N(S)$ die kleinere Menge ist (wegen $|S| \leq |\bar{N}(S)| = |G| - |S \cup N(S)|$). Daher muß der Schnitt $N(S)$ mindestens so groß sein wie $f(|S|)$.

„$\Leftarrow$“: Ist (A, B) eine Trennung mit $0 < |A \setminus B| \leq |B \setminus A|$, so muß $N(A \setminus B)$ in A enthalten sein, da es sonst Kanten zwischen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ gäbe. Setzen wir $S := A \setminus B$, so ist $|S| \leq |B \setminus A| \leq |\bar{N}(S)|$ und daher gilt $|A \cap B| \geq |N(A \setminus B)| \geq f(|A \setminus B|)$. □

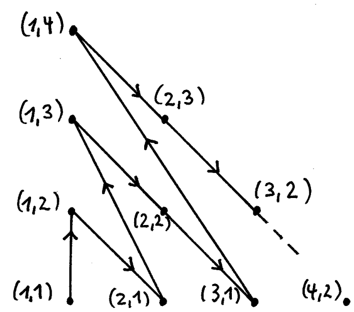
Die Abhängigkeit der Größe $|N(S)|$ von $|S|$ wird auch im Rahmen von isoperimetrischen Problemen behandelt. Dort allerdings nur für eng umgrenzte Graphenklassen wie Hyperwürfel und Gitter. Somit wird der f-Zusammenhang dort nicht als Struktur in Beziehung zu anderen Grapheneigenschaften untersucht.

Den globalen Charakter des f-Zusammenhangs wollen wir am Beispiel von Gittern deutlich machen. Einen Graphen auf der Eckenmenge $(i,j) : i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$ mit der Kantenmenge

$$\{(i,j)(i',j') : |i-i'| + |j-j'| = 1\}$$

nennen wir $m \times n$ Gitter. Ein $n \times 2$ Gitter läßt sich durch zwei Ecken in zwei große Teile trennen. Daher ist es 2-zusammenhängend und f-zusammenhängend nur mit der Funktion $f(k) = 2$. In einem $n \times n$ Gitter hingegen lassen sich mit zwei Ecken nur eine einzige Ecke des Gitters abtrennen. Es ist somit zwar auch nur 2-zusammenhängend, aber, wie wir gleich zeigen werden, f-zusammenhängend für die Funktion $f(k) = \sqrt{2k}$.

Um das zu zeigen, benutzen wir einen Satz von Bollobás und Leader [7] (der allgemein für k-dimensionale Gitter formuliert ist). Dieser sagt Folgendes aus: Gibt man eine Zahl $k \geq 1$ vor und sucht eine Eckenmenge A des $n \times n$ Gitters für die $|N(A)|$ minimal ist, so kann man für A die ersten k Elemente des folgenden Schemas benutzen:



Ist p die größte Zahl, für die A die Ecke $(1,p)$ enthält, und ist $|\bar{N}(A)| \geq |A|$, so muß $p < n$ sein. Dann ist $N(A) = p+1$, da die ersten p Zeilen des Gitters jeweils eine Ecke von $N(A)$ enthalten und zusätzlich $(1,p+1) \in N(A)$ gilt. Aufgrund der dreieckförmigen Anordnung der Ecken ist $k = |A| \leq \sum_{i=1}^{p} i = \frac{1}{2}p(p+1)$. Damit ist $2k < (p+1)^2 \Rightarrow \sqrt{2k} < p+1$. Also ist $|N(A)| \geq p+1 > \sqrt{2k} = f(k)$ und somit das $n \times n$ Gitter f-zusammenhängend.

Bevor wir in Abschnitt 2.2 zum Hauptergebnis kommen, gehen wir vorher auf die Beziehung des f-Zusammenhangs zu anderen Parametern ein. Die Frage, durch welchen f-Zusammenhang ein K^r-Minor erzwungen wird, wird mit folgendem Satz von Alon, Seymour und Thomas [1] gelöst:

Satz 2.2 (Alon, Seymour, Thomas). *Besitzt ein Graph G mit n Ecken keinen K^r-Minor, so gibt es in G eine Trennung (A,B) mit $|A \setminus B|, |B \setminus A| \leq 2n/3$ und $|A \cap B| \leq r^{3/2}\sqrt{n}$.*

Corollar 2.3. *Ist f eine Funktion mit $\lim_{k\to\infty} f(k)/(\sqrt{k}) = \infty \, (k \geq 1)$, so gibt es zu jedem $r \geq 3$ eine Zahl n_r, so daß jeder f-zusammenhängende Graph G mit $n \geq n_r$ Ecken einen K^r-Minor enthält.*

Beweis. Sei r gegeben. Wegen $\lim_{k\to\infty} f(k)/(\sqrt{k}) = \infty$ gibt es eine Zahl m, so daß $f(k) \geq 2r^{3/2}\sqrt{k}$ für alle $k \geq m$ ist. Sei $n_r \geq m$ eine Zahl, für die $\sqrt{n_r} > 12r^{3/2}$ gilt.

Angenommen G enthält keinen K^r-Minor. Dann gibt es nach Satz 2.2 eine Trennung (A, B) in G mit $|A \setminus B| \leq |B \setminus A| \leq 2n/3$ und $|A \cap B| \leq r^{3/2}\sqrt{n}$. Setzen wir $p := |A \setminus B|$, so ist $p \geq n - |B \setminus A| - |A \cap B| \geq n/3 - r^{3/2}\sqrt{n}$. Um p abzuschätzen, formen wir die Voraussetzung an n_r um:

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{n_r} > 12r^{3/2} \Rightarrow n \cdot \frac{4-3}{12} > r^{3/2}\sqrt{n} \Rightarrow n/3 - r^{3/2}\sqrt{n} > n/4$$

Somit ist $4p \geq n$, und wegen $f(|A \setminus B|) = f(p) \geq r^{3/2}\sqrt{4p} > r^{3/2}\sqrt{n} \geq |A \cap B|$ erhalten wir damit einen Widerspruch zum f-Zusammenhang. □

Als nächstes befassen wir uns mit der Beziehung des f-Zusammenhangs zur chromatischen Zahl. Aus $\chi(G) = \lambda$ lassen sich kaum Rückschlüsse auf den f-Zusammenhang von G ziehen, da eine λ-Clique in G bereits ausreicht, um $\chi(G) = \lambda$ zu erzwingen, während der Rest von G aus isolierten Punkten bestehen kann. Die entgegengesetzte Frage, welche chromatische Zahl aus einem entsprechenden f-Zusammenhang folgt, beantwortet sich durch die Beobachtung, daß wir eine unabhängige Menge leicht für eine Trennung nutzen können:

Behauptung 2.4. *Sei $\lambda \geq 1$ eine ganze Zahl und G ein f-zusammenhängender Graph für die Funktion $f(k) = 2\lambda k$. Ist $|G| \geq 2\lambda^2$, so ist $\chi(G) \geq \lambda + 1$.*

Beweis. Angenommen es gibt eine Färbung von G mit höchstens λ Farben und $A \subseteq V(G)$ ist eine Farbklasse maximaler Ordnung. Ist $n = |G|$, so gilt $|A| \geq n/\lambda$. Daher gibt es eine Teilmenge $A' \subset A$ mit $n/(2\lambda) - 1 < |A'| \leq n/(2\lambda)$. Da A unabhängig ist, gilt $|\bar{N}(A)| \geq |A \setminus A'| \geq |A'|$. Der f-Zusammenhang liefert somit $f(|A'|) > 2\lambda(n/(2\lambda) - 1) \geq n - 2\lambda$. Es ist aber $n - n/\lambda \geq n - |A| \geq |N(A')|$, und wegen $n \geq 2\lambda^2$ ist $-2\lambda \geq -n/\lambda$ und damit $|N(A')| < f(|A'|)$. Widerspruch! □

Ersetzt man in Behauptung 2.4 $f(k) = 2\lambda k$ durch $f(k) = 2(\lambda - 1)k$, so wird die Aussage falsch. Denn der vollständig λ-partite Graph K_m^λ, dessen Partitionsmengen aus je m Ecken bestehen, hat die chromatische Zahl λ und ist $f(k) = 2(\lambda - 1)k$-zusammenhängend: Ist A eine nichtleere Teilmenge von $V(K_m^\lambda)$ mit $|\bar{N}(A)| \geq |A|$, so muß $A \cup \bar{N}(A)$ in derselben Partitionsmenge liegen. Daher ist $|A| \leq m/2$. Weil $N(A)$ somit $\lambda - 1$ Partitionsmengen umfaßt, ist $|N(A)| \geq (\lambda - 1)m \geq 2(\lambda - 1)|A|$.

2.1 Hamiltonkreise

Zunächst zu einer unteren Schranke, welcher f-Zusammenhang nicht ausreicht, um in einem Graphen einen Hamiltonkreis zu implizieren. Der vollständig bipartite Graph $K_{n,n+1}$ ist nicht hamiltonsch und ist für n gerade $f(k) = 2k$-zusammenhängend: Ist eine Trennung (A, B) von $K_{n,n+1}$ mit $0 \leq |A \setminus B| \leq |B \setminus A|$

gegeben, so müssen die beiden Mengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ ganz in einer Partitionsmenge von $K_{n,n+1}$ enthalten sein (da sie sonst durch eine Kante verbunden wären), während die andere Partitionsmenge ganz im Schnitt $A \cap B$ liegt. Also ist $|A \setminus B| \leq n/2 = \min\{n/2, (n+1)/2\}$ (n ist gerade) und $|A \cap B| \geq n \geq 2(n/2) \geq 2|A \setminus B|$.

$K_{n,n+1}$ ist jedoch für alle $n \geq 1$ nicht $f(k) = 2k+1$-zusammenhängend. Denn wenn X, Y die Partitionsmengen von $K_{n,n+1}$ mit $|X| = n$ und $|Y| = n+1$ sind sowie S eine Teilmenge von Y mit $|S| = \lceil n/2 \rceil$ ist, so haben wir mit $A := S \cup X$ und $B := (Y \setminus S) \cup X$ eine Trennung mit $|A \cap B| = |X| = n < 2 \cdot (\lceil n/2 \rceil) + 1 = 2(|A \setminus B|) + 1$. Wegen $|A \setminus B| = \lceil n/2 \rceil \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1 = |B \setminus A|$ ist somit $K_{n,n+1}$ nicht $f(k) = 2k+1$-zusammenhängend.

Somit stellt sich die Frage, ob ein $f(k) = 2k+1$-Zusammenhang bereits ausreicht, um einen Hamiltonkreis zu erzwingen. Nach einem Satz von Brandt [8] ist jeder Graph, der $f(k) = (k+1)^2$-zusammenhängend ist, hamiltonsch. Für den Fall des $f(k) = 2k+1$-Zusammenhangs geben wir immerhin an, daß daraus die Existenz eines großen Kreises im Graphen folgt:

Behauptung 2.5. *Sei $f(k) = 2k+1$ für $k \in I\!N \setminus \{0\}$. Ist G ein f-zusammenhängender Graph mit n Ecken, so gibt es in G einen Kreis der Länge $> \frac{4}{9}n$.*

Beweis. Sei C ein längster Kreis in G. Angenommen $|C| \leq \frac{4}{9}n$. Die Komponenten von $G - C$ bezeichnen wir mit $D_1, \ldots, D_t$. Sie seien der Größe nach geordnet: $|D_1| \geq |D_2| \geq \ldots \geq |D_t|$.

1.Fall $|D_1| \geq |C|/2$: Wenn es auf C zwei benachbarte Ecken x, y gibt, die durch einen Weg P in D_1 verbunden sind, so können wir in C die Kante xy durch den Weg P ersetzen und erhalten somit, im Widerspruch zur Maximalität von C, einen längeren Kreis als C. Also gibt es auf C mindestens $\frac{1}{2}|C|$ viele Ecken, die nicht mit D_1 benachbart sind. Sei T diese Menge und $T' \subseteq T$ eine Teilmenge mit $|T'| = \lceil \frac{1}{2}|C| \rceil$. Dann ist $|T'| \leq |D_1| \leq |\bar{N}(T')|$, und daher liefert der f-Zusammenhang $|N(T')| \geq 2|T'| + 1 > |C|$. Wegen $N(T') \setminus C \subseteq D_2 \cup \ldots \cup D_t$ gilt für $S := D_2 \cup \ldots \cup D_t$ somit $|S| \geq |C|/2$. Ist $|S| \leq |D_1|$, so gilt $|S| \leq |\bar{N}(S)|$, und der f-Zusammenhang ergibt daher $|N(S)| > 2|S| \geq |C|$. Dies aber steht im Widerspruch zu $N(S) \subseteq C$. Ganz analog verfährt man, wenn $|S| > |D_1|$ ist.

2.Fall $|C|/2 > |D_1| \geq |C|/4$: Wegen $n \geq \frac{9}{4}|C|$ erhalten wir für $S := D_2 \cup \ldots \cup D_t$ die Beziehung $|S| \geq n - |C| - |D| > (9/4 - 1 - 1/2)|C| = 3/4|C| > |D_1|$. Dann aber ist nach dem f-Zusammenhang $N(D_1) > |C|/2$ (da $|\bar{N}(D_1)| \geq |S|$). Somit aber gibt es zwei auf C benachbarte Ecken, die über einen Weg in D_1 verbunden sind, und wir können C verlängern. Widerspruch!

3.Fall $|C|/4 > |D_1|$: Sei r die kleinste Zahl mit $|D_1| + \ldots + |D_r| \geq \frac{1}{2}|C|$. Wir setzen $S := D_1 \cup \ldots \cup D_r$ und $S' := D_{r+1} \cup \ldots \cup D_t$. Wegen $|D_r| < |C|/4$ ist

$|S| \leq \frac{3}{4}|C|$. Wäre $|S'| \geq \frac{1}{2}|C|$, so hätten wir einen Widerspruch wie im Fall 1 (da $|N(S)|, |N(S')| \leq |C| < 2(\frac{1}{2}|C|) + 1$ und $|\bar{N}(S)| \geq |S|$ oder $|\bar{N}(S')| \geq |S'|$ gilt). Also ist $|S'| < \frac{1}{2}|C|$. Damit aber ist $n = |C| + |S| + |S'| < |C| + \frac{3}{4}|C| + \frac{1}{2}|C| = \frac{9}{4}|C| < \frac{9}{4}\frac{4}{9}n$. Widerspruch! □

2.2 Teilgraphen mit globalem Zusammenhang

Nach einem Satz von Mader (siehe [10]) besitzt ein Graph G mit $d(G) \geq 4k$ einen k-zusammenhängenden Teilgraph H. Für den f-Zusammenhang steht dem potentiell für jede Funktion f die Frage gegenüber, welcher Durchschnittsgrad ausreicht, um einen f-zusammenhängenden Teilgraph H zu erzwingen. Da die Wirkung der Funktion f erst bei großen Trennungen deutlich wird, muß man, damit die Frage sinnvoll wird, zusätzlich fordern, daß H eine Mindestgröße hat. Also: Für welche Funktionen f läßt sich zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $d \in \mathbb{N}$ angeben, so daß jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geq d$ einen f-zusammenhängenden Teilgraphen H mit $|H| \geq m$ besitzt?

Als obere Schranke erhalten wir (Corollar 2.8), daß dies für Funktionen f mit $\lim_{n\to\infty} f(n)/n = \infty$ nicht möglich ist. Auch mit der chromatischen Zahl läßt sich dies nicht erreichen (Behauptung 2.7). Somit reduziert sich die Frage darauf, ob wir Funktionen f mit einem schwächeren Wachstum finden können, für die diese Aussage zutrifft. Mit Satz 2.12 zeigen wir, daß dies für Funktionen $f_b(n) := \frac{c \cdot n}{\ln^{1+b}(n)}$ mit $b > 0$ und einer davon abhängigen Konstante $c > 0$ möglich ist (da so $f_b(1)$ nicht definiert ist, brauchen wir die Ergänzung $f_b(1) = 0$). Für die obere Schranke benötigen wir eine einfache Eigenschaft von Bäumen:

Lemma 2.6. *Zu jedem Baum T mit mindestens 3 Ecken gibt es eine Trennung (A, B) mit $|A \cap B| = 1$ und $|A \setminus B|, |B \setminus A| \geq \frac{1}{3}(|T| - 1)$.*

Beweis. Angenommen es gibt einen Baum T, für den die Aussage nicht zutrifft. Sei (A, B) eine Trennung mit $|A \cap B| = 1$, für die $\min\{|A \setminus B|, |B \setminus A|\}$ maximal ist (wegen $|T| \geq 3$ existiert solch eine Trennung). Wir setzen $\{x\} := A \cap B$. $C_1, \ldots C_k$ seien die Komponenten von $T \setminus x$ mit $|C_1| \geq \ldots \geq |C_k|$. Angenommen $|C_1| \leq \frac{2}{3}(|T| - 1)$. t sei die größte Zahl mit $|C_1| + \ldots + |C_t| \leq \frac{2}{3}(|T| - 1)$. Also ist

$$|C_1| + \ldots + |C_{t+1}| > \frac{2}{3}(|T| - 1). \tag{2.1}$$

Wegen $|C_t| \geq |C_{t+1}|$ ist insbesondere

$$2\left(|C_1| + \ldots + |C_t|\right) \geq |C_1| + \ldots + |C_{t+1}|. \tag{2.2}$$

(2.1) und (2.2) ergeben zusammen

$$|C_1| + \ldots + |C_t| > \frac{1}{3}(|T| - 1).$$

Daher haben wir mit $A' := V(C_1) \cup \ldots \cup V(C_t) \cup \{x\}$ und $B' := V(C_{t+1}) \cup \ldots \cup V(C_k) \cup \{x\}$ eine Trennung, für die $|A' \setminus B'| \geq \frac{1}{3}(|T|-1)$ und $|B' \setminus A'| \geq |T| - 1 - \frac{2}{3}(|T|-1) = \frac{1}{3}(|T|-1)$ gilt. Widerspruch!

Sei also $|C_1| \geq \frac{2}{3}(|T|-1)$. Wir können annehmen, daß $A = V(C_1) \cup \{x\}$ ist. Ist y der Nachbar von x in C_1, so haben wir mit $\tilde{A} := A \setminus \{x\} = V(C_1), \tilde{B} := B \cup \{y\}$ eine bessere Trennung als (A, B), da $\min\{\tilde{A} \setminus \tilde{B}, \tilde{B} \setminus \tilde{A}\} = \min\{|A \setminus B|, |B \setminus A|\} + 1$ ist. Widerspruch! □

Behauptung 2.7. *Ist f eine Funktion mit $\lim_{n\to\infty} f(n)/n = \infty$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß es zu jedem $k \geq 1$ einen Graphen G_k mit $\chi(G_k) \geq k$ gibt, für den jeder Teilgraph $H \subseteq G_k$ mit $|H| \geq m$ nicht f-zusammenhängend ist.*

Beweis. Wir benutzen folgenden Satz von Bollobás [5]:

Für alle $k \geq 1$ gibt es ein Δ_k, so daß es für alle $g \in \mathbb{N}$ einen Graphen G mit $\chi(G) \geq k, \Delta(G) \leq \Delta_k$ und $g(G) \geq g$ gibt.

Um den Beweis einfacher darzustellen, wird die Behauptung in [5] mit $k \geq 4$ aufgeführt. Da aber daraus die Aussage auch für $k = 1, 2, 3$ folgt, können wir den Satz so benutzen wie er oben angegeben ist. Sei also k gegeben und Δ_k eine Zahl, für die der Satz erfüllt ist. Wegen $\lim_{n\to\infty} f(n)/n = \infty$ gibt es eine Zahl $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $f(p)/p > \Delta_k$ und eine Zahl $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so daß $f(n) > 1$ für alle $n \geq q$ ist. Wir setzen $m = 3q + 1$. Aufgrund des Satzes von Bollobás können wir einen Graphen G_k finden mit $\chi(G_k) \geq k, \Delta(G_k) \leq \Delta_k$ und $\mathrm{g}(G_k) \geq (\Delta_k + 2)p$. Sei nun H irgendein Teilgraph von G_k mit $|H| \geq m$. Wir zeigen, daß H nicht f-zusammenhängend ist.

Ist $|H| < (\Delta_k + 2)p$, so ist H ein Baum. Nach Lemma 2.6 gibt dann es eine Trennung (A, B) mit $|A \setminus B| \leq |B \setminus A|$ und $|A \setminus B| \geq \frac{1}{3}(|H|-1) \geq \frac{1}{3}(m-1) = q$. Nach Wahl von q ist somit $f(|A \setminus B|) > 1$. Wegen $|A \cap B| = 1$ ist daher H nicht f-zusammenhängend.

Ist $|H| \geq (\Delta_k + 2)p$, so wählen wir eine beliebige Eckenmenge $A \subset V(H)$ mit $|A| = p$. Da der Maximalgrad von G_k höchstens Δ_k ist, haben wir $|N(A)| \leq \Delta_k \cdot p$. Wegen $f(p) > \Delta_k \cdot p$ und $|\bar{N}(A)| = |H| - |A \cup N(A)| \geq (\Delta_k + 2 - 1 - \Delta_k)p \geq p = |A|$ kann daher H nicht f-zusammenhängend sein. □

Corollar 2.8. *Ist f eine Funktion mit $\lim_{n\to\infty} f(n)/n = \infty$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß es zu jedem $\delta \geq 1$ einen Graphen G_δ mit $\delta(G_\delta) \geq \delta$ gibt, für den jeder Teilgraph $H \subseteq G_\delta$ mit $|H| \geq m$ nicht f-zusammenhängend ist.*

Beweis. Folgt aus Behauptung 2.7, da jeder Graph mit $\chi(G) \geq \delta + 1$ einen Teilgraphen H mit $\delta(H) \geq \delta$ besitzt. Dann hat man nur noch $G_\delta = H$ zu setzen. □

Nachdem wir uns mit der oberen Schranke befaßt haben, wenden wir uns nun einer unteren Schranke und damit dem Hauptergebnis dieses Kapitels zu. Wir werden zeigen (Satz 2.12), daß ein Durchschnittsgrad von $2m$ ausreicht, um einen f_b-zusammenhängenden Teilgraphen mit mindestens m Ecken sicherzustellen (mit der schon oben definierten Funktion f_b).

Zur Vorgehensweise des Beweises: Angenommen G enthält keinen solchen Teilgraphen. Dann besitzt G eine Trennung (A, B) mit einem Schnitt $A \cap B$, der kleiner ist als es ein f_b-Zusammenhang fordern würde. Die Kanten verteilen sich auf die durch die beiden Eckenmengen A und B induzierten Graphen (Lemma 2.10). Wegen der geringen Ordnung von $A \cap B$ erhält man einen Teilgraphen H von G, der deutlich kleiner als G ist (Lemma 2.11), aber dessen Durchschnittsgrad (wiederum nach Lemma 2.11) nach unten durch einen Faktor abgeschätzt werden kann (nämlich $d(H) \geq \left(1 - \frac{f_b(|H|)}{|H|}\right) d(G)$).

Da G keinen f_b-zusammenhängenden Teilgraphen mit mindestens m Ecken enthalten kann, trifft – sofern $|H| \geq m$ ist – dies auch auf H zu. Wir können somit diesen Schritt ausführen, bis wir schließlich einen Teilgraphen H^* erhalten, der weniger als m Ecken besitzt. Um den Durchschnittsgrad von H^* abzuschätzen, benötigen wir Lemma 2.9. Wir erhalten dann einen Widerspruch, da herauskommt, daß $|H^*| < m$ und $d(H^*) \geq m$ sein soll.

Lemma 2.9. *Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ gegeben.*

Sind $n_1, \ldots, n_t$ reelle Zahlen mit $\frac{2}{3}\, n_i \geq n_{i+1}, (i = 1, \ldots, t-1)$ und $n_t \geq m$, so gibt es für alle $b > 0$ eine Konstante $c > 0$, so daß für die Funktion $f_b(n) := \frac{c \cdot n}{\ln^{1+b}(n)}$ $(n > 1)$

$$\prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{f_b(n_i)}{n_i}\right) > \frac{3}{5}$$

gilt.

Andererseits gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und für jedes $c > 0$ reelle Zahlen $n_1, \ldots, n_t$ mit $\frac{2}{3} n_i \geq n_{i+1}$ und $n_t \geq m$, so daß für die Funktion $f(n) := \frac{c \cdot n}{\ln(n)}$ gilt:

$$\prod_{i=1}^{t} \left(1 - \frac{f(n_i)}{n_i}\right) < \epsilon.$$

Beweis. **1.Aussage**

Zur besseren Übersicht geben wir am Anfang die Abschätzungen an, die wir mit den Punkten (a) bis (e) nachliefern. Der Wert der Konstante c wird in (b) und (e) festgelegt.

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{f_b(n_i)}{n_i}\right) &\overset{(\mathbf{a})}{\geq} \prod_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{c}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}\right)\\ &\overset{(\mathbf{b})}{\geq} \frac{3}{4}\prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{c}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}\right) \overset{(\mathbf{c})}{\geq} \frac{3}{4}\left(1-c\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}\right)\\ &\overset{(\mathbf{d})}{\geq} \frac{3}{4}\left(1-c\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^x m)}dx\right) \overset{(\mathbf{e})}{\geq} \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

(a) Wir definieren die Folge $a_i, i=0,1,\ldots$, durch $a_i := 1.5^i m$. In jedem Intervall $[a_i, a_{i+1})$ gibt es dann höchstens ein n_j mit $n_j \in [a_i, a_{i+1})$. Andernfalls gäbe es Indizes $j_2 > j_1 \geq 1$ mit $a_i \leq n_{j_2} < n_{j_1} < a_{i+1}$ und damit hätten wir

$$a_i \leq n_{j_2} \leq (2/3)n_{j_1} < (2/3)a_{i+1} = (2/3)\cdot 1.5^{i+1}m = 1.5^i m = a_i.$$

Widerspruch! Da $f_b(x)/x = c/\ln^{1+b}(x)$ für $x > 1$ monoton fallend ist und $\left(1-\frac{f_b(a_i)}{a_i}\right) \in (0,1)$ gilt, erhalten wir somit die Abschätzung

$$\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{f_b(n_i)}{n_i}\right) \geq \prod_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{f_b(a_i)}{a_i}\right) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{c}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}\right).$$

(b) Es gibt ein $c_1 > 0$, so daß für $0 < c \leq c_1$ gilt: $\prod_{i=0}^{2}\left(1-\frac{c}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}\right) \geq \frac{3}{4}$.

(c) Für $x, y > 0$ ist

$$(1-x)(1-y) = 1-x-y+xy > 1-x-y,$$

und daher für $x_i > 0$

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x_i) \geq 1-\sum_{i=1}^{\infty}x_i.$$

Wir haben somit

$$\prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{c}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}\right) \geq 1-c\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^i m)}.$$

(d) Da $\frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^x m)}$ für $x \geq 0$ monoton fallend ist, gilt

$$\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^i m)} \leq \int_2^{\infty}\frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^x m)}dx.$$

(e) Wegen

$$\int \frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^x m)} = \frac{-1}{b\ \ln(1.5)\ \ln^b(1.5^x m)}$$

ist

$$\int_2^\infty \frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^x m)} dx < \infty.$$

Also gibt es eine Konstante c_2, so daß für $0 < c \leq c_2$

$$c \int_2^\infty \frac{1}{\ln^{1+b}(1.5^x m)} dx \leq \frac{1}{5}$$

gilt.

Mit $c \leq \min\{c_1, c_2\}$ sind somit (b) und (e) erfüllt.

2.Aussage

Zunächst zeigen wir mit vollständiger Induktion, daß für reelle Zahlen $x_i \in (0,1),\ i = 0, 1, \ldots, n$, die Ungleichung

$$\prod_{i=0}^{n} (1 - x_i) \leq e^{-\sum_{i=0}^{n} x_i} \tag{2.3}$$

erfüllt ist.

Induktionsanfang $n = 0$: $(1 - x_0) \leq e^{-x_0}$ folgt aus: $e^{-x_0} = (1 - x_0) + (x_0^2/2! - x_0^3/3!) + (x_0^4/4! - x_0^5/5!) + \ldots$, da die eingeklammerten Paare alle einen positiven Wert besitzen.

Induktionsschritt $n \to n+1$: $\prod_{i=0}^{n+1} (1 - x_i) = (1 - x_{n+1}) \prod_{i=0}^{n} (1 - x_i) \overset{\text{Ind.vor.}}{<} (1 - x_{n+1})\ e^{-\sum_{i=0}^{n} x_i} \overset{\text{Ind.anf.}}{<} e^{-x_{n+1}} e^{-\sum_{i=0}^{n} x_i} = e^{-\sum_{i=0}^{n+1} x_i}$.

Wir definieren wie im ersten Teil die Folge $a_i, i = 0, 1, \ldots$, durch $a_i := 1.5^i \cdot m$. Da $\frac{f(1.5^x \cdot m)}{1.5^x \cdot m} = \frac{c}{\ln(1.5^x \cdot m)}$ für $x \geq 0$ monoton fallend ist, gilt

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{c}{\ln(1.5^i m)} \geq \int_3^{k+1} \frac{c}{\ln(1.5^x m)} dx.$$

Als Stammfunktion erhalten wir

$$\int \frac{c}{\ln(1.5^x \cdot m)} dx = c \frac{\ln(\ln(1.5^x \cdot m))}{\ln(1.5)}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} c \ln(\ln(1.5^x \cdot m) = \infty$ ist daher auch $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=2}^{k} \frac{c}{\ln(1.5^i m)} = \infty$. Es gibt daher ein $t \in \mathbb{N}\,(t \geq 3)$ mit

$$\exp\left(-\sum_{i=2}^{t-1} \frac{c}{\ln(1.5^i m)}\right) < \epsilon. \tag{2.4}$$

Setzen wir $n_t = a_0, n_{t-1} = a_1, \ldots, n_1 = a_{t-1}$, so erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{f(n_i)}{n_i}\right) &= \prod_{i=0}^{t-1}\left(1-\frac{f(a_i)}{a_i}\right) \leq \prod_{i=2}^{t-1}\left(1-\frac{f(a_i)}{a_i}\right)\\ &= \prod_{i=2}^{t-1}\left(1-\frac{c}{\ln(1.5^i m)}\right) \overset{(2.3)}{<} \exp\left(-\sum_{i=2}^{t-1}\frac{c}{\ln(1.5^x m)}\right) \overset{(2.4)}{<} \epsilon.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.10. *Ist (A, B) eine Trennung des Graphen G mit $|A \setminus B|, |B \setminus A| > 0$, so gilt für den Durchschnittsgrad:*

$$d(G[A]) \geq \frac{|A \setminus B|}{|A|}\, d(G) \quad \textit{oder} \quad d(G[B]) \geq d(G).$$

Beweis. Für reelle Zahlen a, b, x, y mit $x, y > 0; a, b \geq 0$ gilt allgemein:

$$\frac{a+b}{x+y} \leq \max\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}\right).$$

Denn sonst hätten wir

$$\begin{matrix}(a+b)x > a(x+y)\\ (a+b)y > b(x+y)\end{matrix} \Rightarrow (a+b)(x+y) > (a+b)(x+y) \;\; \text{Widerspruch!}$$

Sei $G_A := G[A]$ und $G_B := G[B]$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}d(G) = \frac{2||G||}{|G|} &= \frac{2\left(||G_A|| + ||G_B|| - ||G[A \cap B]||\right)}{|A \setminus B| + |B|} \leq \frac{2||G_A|| + 2||G_B||}{|A \setminus B| + |B|}\\ &\leq \max\left(\frac{2||G_A||}{|A|}\,\frac{|A|}{|A \setminus B|}, \frac{2||G_B||}{|B|}\right) = \max\left(d(G_A)\frac{|A|}{|A \setminus B|}, d(G_B)\right).\end{aligned}$$

Also gilt $d(G_A)\frac{|A|}{|A \setminus B|} \geq d(G)$ oder $d(G_B) \geq d(G)$. □

Lemma 2.11. *Sei f eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(k) \leq k$ und m eine ganze Zahl größer als eins. Ist G ein Graph mit $d(G) \geq m$, der keinen f-zusammenhängenden Teilgraph der Ordnung $\geq m$ besitzt, so gibt es einen Teilgraph $H \subseteq G$ mit*

$$|H| \leq \frac{2}{3}|G| \;\; \textit{und} \;\; d(H) \geq \left(1 - \frac{f(|H|)}{|H|}\right) d(G)$$

Beweis. Sei $G' \subseteq G$ ein induzierter Teilgraph von G mit $d(G') \geq d(G)$ von minimaler Ordnung. Wegen $|G'| > d(G') \geq d(G) = m$ ist nach Voraussetzung G' nicht f-zusammenhängend. Es gibt also eine Trennung (A, B) von G' mit $0 < |A \setminus B| \leq |B \setminus A|$ und $|A \cap B| < f(|A \setminus B|)$. Da G' ein induzierter Teilgraph von G ist, haben wir $G'[A] = G[A]$, und nach Lemma 2.10 gilt

$$d(G[A]) \geq \frac{|A \setminus B|}{|A|} d(G') \text{ oder } d(G[B]) \geq d(G').$$

Weil G' der kleinste Teilgraph von G mit $d(G') \geq d(G)$ ist und $|B| < |G'|$ gilt, muß $d(G[B]) < d(G) \leq d(G')$ gelten. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} d(G[A]) \geq \frac{|A \setminus B|}{|A|} d(G') &= \frac{|A| - |A \cap B|}{|A|} d(G) > \frac{|A| - f(|A \setminus B|)}{|A|} d(G) \\ &= \left(1 - \frac{f(|A \setminus B|)}{|A|}\right) d(G) \overset{f \text{ monoton}}{\geq} \left(1 - \frac{f(|A|)}{|A|}\right) d(G). \end{aligned}$$

Setzen wir $H = G[A]$, so bleibt noch $|A| \leq \frac{2}{3}n$ bzw. $|B \setminus A| \geq n/3$ zu zeigen (mit $n = |G|$). Nach Voraussetzung ist $|A \cap B| < f(|A \setminus B|) \leq |A \setminus B|$ und daher $|A \cap B| < |A \setminus B| \leq |B \setminus A|$. Aus $|B \setminus A| < n/3$ würde somit $|G| < n$ folgen. Also ist $|B \setminus A| \geq n/3$. □

Satz 2.12. *Sei $b > 0$. Dann gibt es ein $c > 0$, so daß für $f_b(n) := \frac{c \cdot n}{\ln^{1+b}(n)}$ (für $n > 1$, im Fall $n = 1$ sei $f_b(1) = 0$), folgende Aussage erfüllt ist: Ist $m \in \mathbb{N}$ gegeben, so gibt es für jeden Graph G mit $d(G) \geq 2m$ einen Teilgraphen $H \subseteq G$ mit $|H| \geq m$, der f_b-zusammenhängend ist.*

Beweis. Ist $m = 1$, so ist weiter nichts zu zeigen, da für jede Funktion f ein aus einer Ecke bestehender Graph f-zusammenhängend ist. Sei also $m \geq 2$. Sei $c_1 > 0$ derart, daß $\frac{c_1}{\ln^{1+b}(2)} < \frac{1}{6}$ gilt und $c_2 > 0$ eine reelle Zahl, mit der $f_b(n)$ Lemma 2.9 erfüllt ist. Wir setzen $c := \min\{c_1, c_2\}$. Mit dieser Konstante erfüllt f_b das Lemma 2.9, und es gilt ebenso $\frac{c}{\ln^{1+b}(2)} < \frac{1}{6}$.

Angenommen weder G noch ein Teilgraph von G der Ordnung $\geq m$ ist f_b-zusammenhängend. Sei $G_0 = G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{s-1} \supset G_s$ eine maximale Kette von Teilgraphen, die mit $n_i := |G_i|$ die Ungleichungen $(2/3)n_i \geq n_{i+1}$ und $d(G_j) \geq d(G_0) \prod_{k=1}^{j} \left(1 - \frac{f_b(n_k)}{n_k}\right)$ erfüllen ($i = 0, \ldots, s-1$; $j = 0, \ldots, s$). Dann muß $n_s < m$ sein, da sonst nach Lemma 2.9 $\prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{f_b(n_i)}{n_i}\right) \geq \frac{3}{5}$, also $d(G_s) \geq d(G_0)\, \frac{3}{5} \geq \frac{6}{5}\, m > m$ wäre, und damit nach Lemma 2.11 ein weiterer Teilgraph $G_{s+1} \subset G_s$ mit den geforderten Eigenschaften existieren würde.

$|G_s| < m$ und $d(G_s) \geq \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{f_b(n_i)}{n_i}\right)$ führt aber schnell zum Widerspruch: Sei $t \leq s$ der kleinste Index mit $d(G_t) < m$. Dann ist $n_{t-1} \geq m$ und somit nach Lemma 2.9 $\prod_{i=1}^{t-1} \left(1 - \frac{f_b(n_i)}{n_i}\right) \geq \frac{3}{5}$. Da $\ln^{1+b}(x)$ für $x > 1$ monoton wachsend ist, gilt für $n_t \geq 2 : -\frac{c}{\ln^{1+b}(n_t)} \geq -\frac{c}{\ln^{1+b}(2)}$. Mit der Voraussetzung $-\frac{c}{\ln^{1+b}(2)} > -\frac{1}{6}$ erhalten wir somit:

$$\left(1 - \frac{f_b(n_t)}{n_t}\right) = \left(1 - \frac{c}{\ln^{1+b}(n_t)}\right) \geq \left(1 - \frac{c}{\ln^{1+b}(2)}\right) \geq 1 - \frac{1}{6} \geq \frac{5}{6}.$$

Ist $n_t = 1$, so haben wir $\left(1 - \frac{f_b(n_t)}{n_t}\right) = 1 > \frac{5}{6}$. Also:

$$d(G_t) \geq d(G_0) \left(\frac{n_t - f_b(n_t)}{n_t}\right) \prod_{i=1}^{t-1} \left(1 - \frac{f_b(n_i)}{n_i}\right) \geq 2m \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} \geq m.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $|G_t| < m$! □

Wie ich erst später, dank eines Hinweises von Daniela Kühn, bemerkte, kann man Satz 2.12 auch aus einer Arbeit von Komlós und Szemerédi [15] herleiten.

Die Funktion f in Satz 2.12 ist mit der Methode des Beweises nicht zu verbessern. Denn nach Lemma 2.9 kann man den Wert des Produktes $\prod_{i=1}^{t}\left(1 - \frac{f(n_i)}{n_i}\right)$ für die Funktion $f(n) := \frac{c \cdot n}{\ln(n)}$ nicht mehr nach unten begrenzen. Auch mit dem Verfahren von Komlós und Szemerédi kann die Funktion f nicht verbessert werden. Wächst die Funktion f stärker als eine lineare Funktion, so folgt aus Behauptung 2.7 und Corollar 2.8, daß ein f-zusammenhängender Teilgraph nicht mittels des Durchschnittsgrades oder der chromatischen Zahl erzwungen werden kann (sofern diese nicht von der Ordnung des Graphen abhängen, andernfalls wäre es natürlich möglich). Offen ist das Problem also für Funktionen f mit $c_1 n/\ln(n) \leq f(n) \leq c_2 n$ (mit Konstanten c_1, c_2).

Ein wesentlicher Grund für unsere Untersuchung von f-zusammenhängenden Teilgraphen war das Ziel, damit die Auswirkung der chromatischen Zahl besser zu verstehen. Während ein Graph mit hoher chromatischer Zahl auch einen Teilgraphen mit hohem Durchschnittsgrad enthalten muß, hat hoher Durchschnittsgrad allein keinen Einfluss auf die chromatische Zahl (man betrachte dazu etwa den $K_{n,n}$). Da die chromatische Zahl somit die stärkere Eigenschaft ist, liegt es nahe, daß es Eigenschaften geben müßte, die dieses widerspiegeln. Der f-Zusammenhang – als ein ausgeprägt globaler Parameter – schien zunächst ein geeigneter Kandidat dafür zu sein. Satz 2.12 zeigt jedoch, daß man bereits mit dem Durchschnittsgrad recht weit kommt.

Interessant für weitere Untersuchungen ist nun insbesondere der Fall von linearen Funktionen f. Immerhin besteht die Möglichkeit, daß dann ein f-zusammenhängender Teilgraph allein durch die Vorgabe der chromatischen Zahl zu erreichen ist. Sollte sich dies hingegen als falsch erweisen, so geht die Suche nach Strukturen, die den besonderen Charakter der chromatischen Zahl deutlich machen, weiter...

Kapitel 3

Taillenweite und Minoren

Nach einem Satz von Kostochka [16] und Thomason [20] (siehe auch [10]) läßt sich in einem Graphen G ein vollständiger Minor K^r erzwingen, indem man einen Durchschnittsgrad von $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$ fordert. Lassen sich andere Graphen-Parameter heranziehen, um einen vollständigen Minor zu erzwingen? Die Taillenweite $g(G)$ scheint auf den ersten Blick kein geeigneter Kandidat dafür zu sein. Ohne Zusatzeinschränkung ist sie dies natürlich auch nicht, da G dann nur ein großer Kreis zu sein bräuchte. Gibt man allerdings zusätzlich vor, daß der Minimalgrad mindestens den Wert 3 besitzen soll, so ändert sich das Bild.

Thomassen [21] zeigte , daß jeder Graph mit Taillenweite mindestens $4k-3$ und Minimalgrad mindestens 3 einen Minor mit Minimalgrad k enthält. Mit dem Satz von Kostochka und Thomason folgt daraus auch die Existenz eines entsprechenden K^r-Minors. Er bewies dies, indem er den Graphen in geeignete Bäume partitionierte, so daß zwei Bäume durch maximal zwei Kanten verbunden sind. Diese Bäume werden als Verzweigungsmengen des Minors benutzt. Sind die Bäume im Graphen induziert, so schicken sie mindestens genauso viele Kanten in den Rest des Graphen, wie sie selber Ecken besitzen. Unterliegt die Struktur der Bäume keinen Einschränkungen, so können wir sie nur dann als induziert voraussetzen, wenn sie weniger als $4k-3$ Ecken enthalten.

Wir werden ebenfalls zum Ziel kommen, indem wir den Graphen in Bäume unterteilen, nutzen aber dabei aus, daß alle Ecken vom Abstand $< (g(G)-1)/2$ zu einer vorgegebenen Ecke einen Baum induzieren. Da der Minimalgrad mindestens 3 ist, nimmt die Anzahl dieser Ecken exponentiell mit der Taillenweite zu. Auf diese Weise wird die Taillenweite, die erforderlich ist, um einen Minor mit Minimalgrad k zu erzwingen, logarithmisch statt linear von k abhängen. Die Größenordnung $\log k$ läst sich nicht verbessern, wie die Untersuchung der unteren Schranke für dieses Problem zeigt:

3.1 Untere Schranke

Welche Taillenweite reicht nicht aus, um für einen Graphen G mit $\delta(G) \geq 3$ einen Minor H mit $\delta(H) \geq k$ ($k \geq 4$) zu erzwingen? Allgemein ist es schwierig, nachzuweisen, ob ein Graph einen solchen Minor nicht enthält. Wir werden daher eine einfache Eigenschaft ausnutzen:

Lemma 3.1. *Ist G ein 3-regulärer Graph mit n Ecken und H ein Minor von G, so ist $(\delta - 2)(\delta + 1) \leq n$ mit $\delta := \delta(H)$.*

Beweis. $V_1, \ldots, V_p$ seien die Verzweigungsmengen von H. Ihre Anzahl muß größer sein als der Minimalgrad von H. Also ist $p \geq \delta + 1$.

Da G 3-regulär ist, ergibt die Summe über alle Eckengrade in einer Menge V_i genau $3|V_i|$. Weil V_i zusammenhängend ist und somit einen aufspannenden Baum enthält, ist der Beitrag der inneren Kanten von V_i zu dieser Summe mindestens $2(|V_i| - 1)$. Also gibt es höchstens $|V_i| + 2$ viele Kanten die aus V_i nach $G \setminus V_i$ führen. Wegen $\delta(H) = \delta$ ist also $|V_i| \geq \delta - 2$.

Da $V_1, \ldots V_p$ disjunkt sind, haben wir $(\delta + 1)(\delta - 2) \leq n$. □

Damit stellt sich die Frage, wie viele Ecken ein 3-regulärer Graph mit Taillenweite $\geq g$ mindestens besitzen muß. Sei $\mu(g)$ diese Anzahl. Der genaue Wert von $\mu(g)$ ist derzeit nur bis $g = 12$ bekannt (siehe [9, 17]). Für größere Werte muß man sich daher mit Schranken zufrieden geben.

Zur unteren Schranke: Ist v eine beliebige Ecke eines 3-regulären Graphen G mit ungerader Taillenweite g, so gibt es genau doppelt so viele Ecken mit Abstand $d \leq (g-1)/2$ zu v wie es Ecken mit Abstand $d-1$ zu v gibt (sofern $d \geq 2$; Ecken mit Abstand $d = 1$ zu v gibt es genau 3). Summiert man die Anzahlen der Ecken vom Abstand $0, 1, \ldots, (g-1)/2$ zu v auf, so erhält man

$$1 + 3\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{(g-3)/2}\right) = 3 \cdot 2^{(g-1)/2} - 2.$$

Ist g gerade, so beginnt man mit einer Kante und erhält durch eine ähnliche Überlegung die Schranke $\mu(g) \geq 2 \cdot 2^{g/2+1} - 2$ (siehe [2]).

Die derzeit beste obere Schranke stammt von Biggs, Hoare [3] und Weiss [22] (siehe auch [2]) und besagt, daß es für jede Zahl n ein $g \geq n$ gibt, mit $\mu(g) \leq c^* \cdot 2^{0.75g}$ (wobei c^* eine Konstante ist). In Verbindung mit Lemma 3.1 erhalten wir dann:

Behauptung 3.2. *Für jede Zahl m gibt es ein $k \geq m$, so daß es einen 3-regulären Graphen G mit $g(G) \geq 8/3 \log(k-2) + c$ (c eine Konstante) gibt, der keinen Minor H mit $\delta(H) \geq k$ besitzt.*

Beweis. Zu m gibt es eine ganze Zahl g mit $(m-2)(m+1) \leq c^* \cdot 2^{0.75g}$, für die es – nach dem oben erwähnten Satz – einen 3-regulären Graphen G mit $|G| \leq c^* \cdot 2^{0.75g}$ und $g(G) \geq g$ gibt. k sei die kleinste Zahl mit $c^* \cdot 2^{0.75g} < (k-2)(k+1)$ und $k \geq 4$.

Dann ist $k \geq m$ und nach Lemma 3.1 enthält G keinen Minor H mit $\delta(H) \geq k$. Wegen der Minimalität von k ist

$$c^* \cdot 2^{0.75g} \geq (k-3)k \overset{(k \geq 4)}{\geq} (k-2)^2 \Rightarrow \log c^* + (3/4)g \geq 2\log(k-2)$$
$$\Rightarrow g \geq 8/3 \log(k-2) - 4/3 \log c^*.$$

Mit $c := 4/3 \log c^*$ ergibt sich daher die Behauptung. □

Eine Schranke, die für alle Werte der Taillenweite gilt, erhält man mit einem Ergebnis von Sauer [18](siehe auch [6]). Danach ist $\mu(g) \leq 2^{g-1}$, und mit Lemma 3.1 ergibt dies:

Behauptung 3.3. *Für alle $k \geq 4$ gibt es einen 3-regulären Graphen G mit $g(G) \geq 2\log(k-1)$, der keinen Minor H mit $\delta(H) \geq k$ besitzt.*

Beweis. Sei g die größte Zahl mit $(k-2)(k+1) > 2^{g-1}$. Wegen $k \geq 4$ ist $g \geq 3$. Nach dem Satz von Sauer gibt es einen 3-regulären Graph G mit $|G| \leq 2^{g-1}$ und $g(G) \geq g$. Nach Lemma 3.1 enthält G keinen Minor H mit $\delta(H) \geq k$, und da g maximal gewählt wurde, ist

$$2^g \geq (k-2)(k+1)$$
$$\Rightarrow g \geq \log((k-2)(k+1)) \geq \log((k-1)^2) = 2\log(k-1).$$

□

Mit jeder Verbesserung der Schranke von $\mu(g)$ erhält man auch eine Verbesserung von Behauptung 3.3. Es wird vermutet (vgl. Bollobas [6], S. 109), daß die einfache untere Schranke von $\mu(g)$ bereits die korrekte Größenordnung von $\mu(g)$ ist (in [6] wird die Fragestellung für Graphen mit $\delta(G) \geq 3$ untersucht, aber es besteht die Vermutung, daß hier ein Übergang zu 3-regulären Graphen keinen Unterschied macht (vgl. Bollobas [4], S. 13)). Für die Werte $g \leq 12$ – also die Werte, für die $\mu(g)$ bekannt ist – liegt jedenfalls $\mu(g)$ sehr nah an dieser unteren Schranke (siehe [9, 17]). Mit der Vermutung $\mu(g) \sim 2^{g/2}$ würde sich die Schranke $g(G) \geq 2\log(k-1)$ von Behauptung 3.3 zu $g(G) \sim 4\log k$ verbessern.

3.2 Obere Schranke

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß eine Taillenweite von $6\lceil\log(k/2)\rceil + 4$ ausreicht, um einen Minor mit Minimalgrad k zu erzwingen.

Zur Vorgehensweise des Beweises: Unter Ausnutzung der Taillenweite und des Minimalgrades erhalten wir eine Partition der Eckenmenge in Bäume von niedrigem Durchmesser, aber hoher Anzahl von Ecken. Durch Kontraktion dieser Bäume erhält man dann den gewünschten Minor. Mit diesem Ansatz erreicht man bereits eine Verbesserung der Taillenweite-Schranke auf $8\lceil\log(k/3)\rceil + 2$ (in dem Fall verläuft zwischen je zwei Bäumen maximal eine Kante, siehe [10]). Um aber noch näher an die untere Schranke zu gelangen, muß man die Anzahl der Kanten zwischen zwei Bäumen sehr viel genauer abschätzen. Zum Abschätzen dieser Anzahl werden wir die beiden folgenden Lemmata brauchen, für die wir wiederum den Begriff des Wurzelbaums und sich daran anschließende Begriffe benötigen.

Ein Wurzelbaum B ist ein Baum mit einer ausgezeichneten Ecke w, die Wurzel genannt wird. Die Tiefe von B ist der größte auftretende Abstand zu w. Auf der Eckenmenge von B erhalten wir eine partielle Ordnung, indem wir für zwei Ecken x, y aus B $x \preceq y$ setzen, falls x auf dem eindeutig bestimmten Weg von w nach y liegt. Ist $y \neq x$, wird y als Nachfolger von x bezeichnet, und ist y zusätzlich mit x benachbart, so heißt y direkter Nachfolger von x. Umgekehrt nennen wir x (direkten) Vorgänger von y, wenn y (direkter) Nachfolger von x ist. Betrachten wir eine Ecke x aus B, so wird auf der Eckenmenge $\{y : x \preceq y\}$ ein Wurzelbaum mit Wurzel x induziert, den wir als den durch x induzierten Ast bezeichnen.

Ein 2-Baum sei ein Wurzelbaum, dessen innere Ecken genau zwei direkte Nachfolger haben. Auch den Baum, der nur aus einer Ecke besteht, bezeichnen wir als 2-Baum (in dem Fall ist die Wurzel auch das Blatt). Für einen Wurzelbaum bezeichnen wir mit L^i_B die Menge der Blätter („leafs“) von B, die den Abstand i zur Wurzel besitzen.

Lemma 3.4. *Ist B ein 2-Baum mit Wurzel w und der Tiefe t, so gilt:*

$$|L^0_B| + 2^{-1}|L^1_B| + \ldots + 2^{-t}|L^t_B| = 1.$$

Beweis. Wir verändern den Baum schrittweise. Ist x ein Blatt von B mit maximalen Abstand $i \geq 1$ von w und ist z direkter Vorgänger von x, so gibt es noch genau einen weiteren direkten Nachfolger x' von z, der ebenfalls ein Blatt sein muß. Streichen wir nun x und x' in B, so wird z dadurch zu einem neuem Blatt. $|Bl^i|$ erniedrigt sich damit um zwei, während $|Bl^{i-1}|$ um eins wächst. Der Wert von $2^{-i+1}\left(\frac{1}{2}|Bl^i| + |Bl^{i-1}|\right) = 2^{-i}|Bl^i| + 2^{-(i-1)}|Bl^{i-1}|$ bleibt daher konstant und somit auch die Summe

$$|L^0_B| + 2^{-1}|L^1_B| + \ldots + 2^{-t}|L^t_B|.$$

Führen wir diesen Schritt aus, solange es Blätter vom Abstand > 0 gibt, gelangen wir schließlich zu einem Baum, der nur aus der Wurzel w besteht. Für solch einen Baum aber ist die Aussage natürlich richtig. $\square$

Für den Beweis brauchen wir eine Folgerung aus diesem Lemma und definieren dazu für einen Graphen G und eine Ecke z aus G:

$$V^d_{G,z} := \{x \in G : d(z, x) = d\}.$$

Lemma 3.5. *Sei B ein Wurzelbaum mit Wurzel w, dessen innere Ecken alle mindestens Grad 3 besitzen. Ist t die Tiefe des Baumes und d eine ganze Zahl kleiner oder gleich t, so gilt:*

$$|L_B^d| + 2^{-1}|L_B^{d+1}| + \ldots + 2^{-(t-d)}|L_B^t| \geq |V_{B,w}^d|.$$

Haben alle inneren Ecken den Grad 3, so ist die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt.

Beweis. Zunächst folgt aus Lemma 3.4, daß für Wurzelbäume T (der Tiefe p), deren innere Ecken mindestens 2 Nachfolger haben

$$|L_T^0| + 2^{-1}|L_T^1| + \ldots + 2^{-p}|L_T^p| \geq 1 \tag{3.1}$$

gilt. Denn in T können wir an Ecken mit mehr als zwei Nachfolgern die überzähligen Nachfolger samt ihren induzierten Ästen abtrennen und gelangen so zu einem 2-Baum T'. Jedes Blatt aus T' ist auch ein Blatt in T, und nach Anwendung von Lemma 3.4 auf T' erhalten wir somit (3.1).

Den durch eine Ecke $x \in V_{B,w}^d$ induzierten Ast bezeichnen wir mit B_x. Ein Blatt in B vom Abstand $d+i$ zu w ist dann ein Blatt vom Abstand i zu x in einem Ast B_x. Besitzen alle inneren Ecken von B den Grad 3, so ist B_x ein 2-Baum und wir können direkt Lemma 3.4 anwenden. Ansonsten wenden wir (3.1) auf jeden dieser Äste an. In beiden Fällen summieren wir und erhalten so die Aussage. Genauer: $|L_B^{d+i}| = \sum_{x \in V_{B,w}^d} |L_{B_x}^i|$ und daher

$$|L_B^d| + 2^{-1}|L_B^{d+1}| + \ldots + 2^{-(t-d)}|L_B^t| =$$
$$\sum_{x \in V_{B,w}^d} \left(|L_{B_x}^0| + 2^{-1}|L_{B_x}^1| + \ldots + 2^{-(t-d)}|L_{B_x}^{t-d}|\right) \overset{(3.1)}{\geq} \left(\overset{\text{Lemma 3.4}}{=}\right) \sum_{x \in V_{B,w}^d} 1 = |V_{B,w}^d|.$$

□

Satz 3.6. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat jeder Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 3$ und Taillenweite $g(G) \geq 6\lceil \log(k/2) \rceil + 4$ einen Minor H mit $\delta(H) \geq k$.*

Beweis. Wir setzen $d := \lceil \log(k/2) \rceil$.

Sei $X \subset V(G)$ maximal mit $d(x,y) > 2d$ für alle $x, y \in X$. Für jedes $x \in X$ sei $T_x^0 := \{x\}$. Zu gegebenem $i < 2d$ nehmen wir an, daß bereits disjunkte Bäume $T_x^i \subset G$ definiert sind, deren Ecken zusammen genau die Ecken mit Abstand höchstens i von X in G sind. Verbinden wir nun jede Ecke mit Abstand $i+1$ von X mit einem Nachbarn des Abstands i, so erhalten wir eine Familie erweiterter disjunkter Bäume T_x^{i+1}. Da jede Ecke von G den Abstand höchstens $2d$ von X hat (wegen der Maximalität von X), partitionieren die so erhaltenen Bäume $T_x := T_x^{2d}$ die gesamte Eckenmenge von G. Mit dieser Konstruktion enthält jedes T_x alle Ecken v mit $d(x,v) \leq d$, da für $x' \in X$ mit $x' \neq x$ $d(x',v) > d$ ist.

Später werden wir folgende Eigenschaft benutzen:

$$\begin{gathered}\text{Ist } vw \in E(G) \text{ eine Kante zwischen } T_x \text{ und } T_y \\ \text{mit } v \in T_x \text{ und } w \in T_y, \text{ so ist } d(y,w) \leq d(x,v)+1\end{gathered} \tag{3.2}$$

Denn: Jede Ecke aus G mit Abstand i zu X ist in einem Baum $T_z^i, z \in X$, enthalten. Wegen $vw \in E(G)$ ist $d(X,w) \leq d(x,v)+1$. Da zudem $w \in T_y$ gilt, folgt $w \in T_y^{d(x,v)+1}$ und somit (3.2).

Zunächst erreichen wir mit Lemma 3.5 eine Abschätzung, wie viele Kanten aus T_x herausführen. Dazu definieren wir für $x \in X$:

$$E_x^i = \{vw \in E(G) : v \in T_x, w \in G \setminus T_x, d(x,v) = i\}.$$

Jede Ecke in $G \backslash T_x$ ist zu höchstens einer Ecke in T_x benachbart, da wir sonst einen Kreis der Länge $\leq 4d+2$ in G hätten. Daher können wir T_x durch Hinzufügen aller seiner Nachbarn (mitsamt ihren Kanten) zu einem Baum T'_x erweitern. Damit ist $|E_x^i| = |L_{T'_x}^{i+1}|$. Auch in T'_x besitzen alle inneren Ecken mindestens Grad 3 und daher gilt

$$\begin{aligned}&2^{-1}|E_x^d| + \ldots + 2^{-(d+1)}|E_x^{2d}| \\ &\qquad = 2^{-1}|L_{T'_x}^{d+1}| + \ldots + 2^{-(d+1)}|L_{T'_x}^{2d+1}| \overset{\text{Lemma 3.5}}{\geq} |V_{T'_x,x}^d| = |V_{G,x}^d|.\end{aligned}$$

Indem wir mit 2^{d+1} multiplizieren und $V_x^d := V_{G,x}^d$ setzen, erhalten wir:

$$2^d|E_x^d| + 2^{d-1}|E_x^{d+1}| + \ldots + 2^0|E_x^{2d}| \geq 2^{d+1} \cdot |V_x^d|. \tag{3.3}$$

Jede Kante aus E_x^i führt zu einem von T_x verschiedenen Baum T_y. Demgemäß partitionieren wir E_x^i in Kantenmengen $A_{x,y}^i$, indem wir $e \in A_{x,y}^i$ setzen, falls e zwischen T_x und T_y verläuft (und in E_x^i enthalten ist). Somit ist

$$\begin{aligned}&2^d|E_x^d| + 2^{d-1}|E_x^{d+1}| + \ldots + 2^0|E_x^{2d}| \\ &\qquad = \sum_{y \in X, y \neq x} \left(2^d|A_{x,y}^d| + 2^{d-1}|A_{x,y}^{d+1}| + \ldots + 2^0|A_{x,y}^{2d}|\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Anzahl der zu T_x benachbarten Bäume T_y können wir nun mit einem kleinen Trick auf eine Aussage für die Mengen $A_{x,y}^i$ zurückführen. Dazu definieren wir für $x, y \in X$ die Indikatorfunktion I wie folgt: $I(x,y) = 1$, falls es eine Kante zwischen T_x und T_y gibt, und $I(x,y) = 0$ andernfalls. Dann erhalten wir

$$2^{d+1}|V_x^d| \overset{(3.3),(3.4)}{\leq} \sum_{y \in X, y \neq x} \left(2^d|A_{x,y}^d| + 2^{d-1}|A_{x,y}^{d+1}| + \ldots + 2^0|A_{x,y}^{2d}|\right) I(x,y).$$

Falls

$$2^d|A_{x,y}^d| + 2^{d-1}|A_{x,y}^{d+1}| + \ldots + 2^0|A_{x,y}^{2d}| \leq |V_x^d| \tag{3.5}$$

gilt, erhalten wir

$$2^{d+1}|V_x^d| \leq \sum_{y \in X, y \neq x} |V_x^d| \; I(x,y)$$

und können $|V_x^d|$ herauskürzen. Nach Definition von $I(x,y)$ ist dann T_x zu mindestens 2^{d+1} vielen anderen Bäumen T_y benachbart. Der Minor H, der durch Kontraktion aller Bäume T_x entsteht, hat somit den Minimalgrad $\delta(H) \geq 2 \cdot 2^d = 2 \cdot 2^{\lceil \log k/2 \rceil} \geq 2 \cdot k/2 = k$. Um den Beweis abzuschließen, reicht es daher aus, (3.5) zu beweisen.

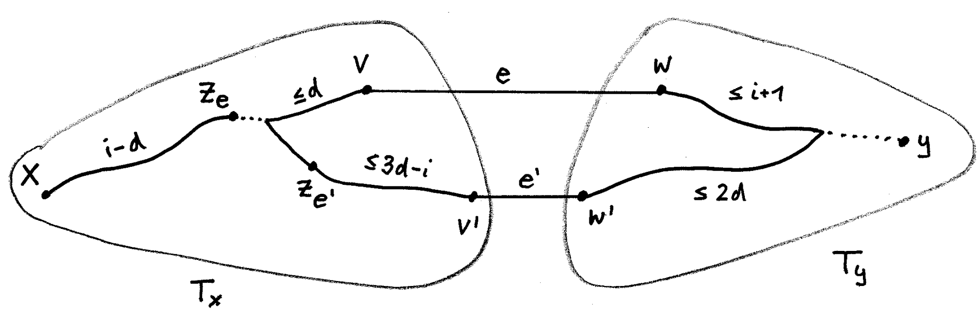
Als Hilfsmittel für den Beweis von (3.5) werden wir zu jeder Kante e zwischen T_x und T_y eine Eckenmenge $B_e \subseteq V_x^d$ zuordnen mit folgenden zwei Eigenschaften:

(B1) $|B_e| \geq 2^{2d-i}$ mit $i := d(x,v)$, wobei v die Endecke von e ist, die in T_x liegt.

(B2) $B_e \cap B_{e'} = \emptyset$ für zwei verschiedene Kanten e, e' zwischen T_x und T_y.

Sei also $e = vw$ eine Kante mit $v \in T_x, w \in T_y$ gegeben und $i := d(x,v)$. Nach Konstruktion der Bäume $T_x, T_y, \ldots$ liegen alle Ecken $z \in G$ mit $d(x,z) \leq d$ in T_x. Es ist daher $d \leq i \leq 2d$. In T_x gibt es genau einen Weg P von x nach v. Auf P sei z_e die Ecke vom Abstand $i - d$ (für $i = d$ ist dann $z_e = x$). Als B_e wählen wir dann alle Ecken in V_x^d, die Nachfolger von z_e sind. Also haben alle Ecken aus B_e den Abstand $d - (i-d) = 2d - i$ von z_e. Da T_x bis zum Abstand d von x ein induzierter Baum ist, dessen innere Ecken mindestens zwei Nachfolger besitzen, erhalten wir somit $(B1)$.

Für den Nachweis von (B2) reicht es zu zeigen, daß zu verschieden Kanten e, e' zwischen T_x und T_y die Ecken z_e und $z_{e'}$ unvergleichbar (in T_x) sind. Denn dann sind die durch z_e und $z_{e'}$ induzierten Äste disjunkt und somit auch B_e und $B_{e'}$ (da Teilmengen dieser Äste). Nehmen wir also an, z_e und $z_{e'}$ sind vergleichbar. Ohne Einschränkung sei $z_e \preceq z_{e'}$. Sei $e = vw, e' = v'w'$ mit $v, v' \in T_x, w, w' \in T_y$. Wir setzen $i := d(x,v)$ und zeigen, daß zwischen T_x und T_y ein Kreis existiert, der kleiner ist, als es die Taillenweite vorgibt.



Kreis zwischen T_x und T_y

Sei $P_{z_e,v}$ der Weg der Länge $i-(i-d)=d$ von z_e nach v. Aus $z_e \preceq z_{e'} \preceq v'$ folgt, daß v' ein Nachfolger von z_e ist. Da v' höchstens den Abstand $2d$ von x hat, gibt es also einen Weg $P_{z_e,v'}$ zwischen v' und z_e der Länge $\leq 2d-(i-d)=3d-i$. Wegen $i=d(x,y)$ gibt es nach (3.2) einen Weg $P_{w,y}$ in T_y von w nach y der Länge $\leq d(x,v)+1=i+1$. Zuletzt gibt es einen Weg $P_{y,w'}$ zwischen y und w' der Länge $\leq 2d$. Mit den Wegen $P_{z_e,v}, P_{y,w}, P_{y,w'}, P_{z_e,v'}$ und den Kanten $vw, v'w'$ ergibt sich die Existenz eines Kreises der Länge

$$\begin{aligned}\leq l(P_{z_e,v}) + l(P_{y,w}) + l(P_{y,w'}) + l(P_{z_e,v'}) + 2 \\ \leq d + (i+1) + 2d + (3d-i) + 2 = 6d+3.\end{aligned}$$

Widerspruch! Also besitzt jede Menge B_e die geforderten Eigenschaften, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}2^d|A^d_{x,y}| + 2^{d-1}|A^{d+1}_{x,y}| + \ldots + 2^0|A^{2d}_{x,y}| &= \sum_{i=d}^{2d} 2^{2d-i}|A^i_{x,y}| \\ &= \sum_{i=d}^{2d} \sum_{e\in A^i_{x,y}} 2^{2d-i} \overset{\text{(B1)}}{\leq} \sum_{i=d}^{2d} \sum_{e\in A^i_{x,y}} |B_e| \overset{\text{(B2)}}{\leq} |V^d_x|.\end{aligned}$$

Damit haben wir (3.5) bewiesen, womit der Beweis abgeschlossen ist. □

Corollar 3.7. *Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß jeder Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) \geq 3$ und Taillenweite $g(G) \geq 6\lceil \log r + \frac{1}{2}\log\log r\rceil + c$ einen K^r-Minor enthält.*

Beweis. Wir setzen $c := 4 + 6\lceil \log(c'/2)\rceil$, wobei c' die Konstante aus dem Satz von Kostochka [16] und Thomason [20] ist (siehe auch [10]), nach dem ein Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $c'r\sqrt{\log r}$ einen K^r als Minor besitzt. Es ist $6\lceil \log r + \frac{1}{2}\log\log r\rceil + c \geq 6\lceil \log r + \log\sqrt{\log r} + \log(c'/2)\rceil + 4 = 6\lceil \log((c'r\sqrt{\log r})/2)\rceil + 4$. Also besitzt G nach Satz 3.6 einen Minor H mit $\delta(H) \geq c'r\sqrt{\log r}$. Somit ist K^r als Minor in H und damit auch als Minor in G enthalten. □

3.3 Differenz der Schranken

Zwischen Satz 3.6 und Behauptung 3.2 gibt es eine Lücke. Auch die vermutete untere Schranke $\sim 4\log(k)$ ist noch um ein Drittel kleiner als die von Satz 3.6. Es ist daher interessant, zu untersuchen, ob die im Beweis von Satz 3.6 benutzten Methoden ausgereizt wurden.

Im ersten Schritt des Beweises werden die Bäume $T_x, x \in X$ ausgewählt. Könnte man die Menge X so wählen, daß alle Ecken in G einen Abstand α mit $d \leq \alpha < 2d$ zu X haben (und nach wie vor $d(x,y) \geq 2d+1$ für $x,y \in X, x \neq y$ gilt), so würde dies zu einer Verbesserung der Taillenweite-Schranke führen: statt

$6d+4$ mit $d = \lceil \log(k/2) \rceil$ würde $2d+2\alpha+4$ ausreichen. Um das zu zeigen, gehen wir die Stellen im Beweis von Satz 3.6 durch, in denen die Taillenweite benutzt wird.

Im wesentlichen wird die Taillenweite gebraucht, um (3.5) zu beweisen. Dies erreichten wir, indem wir zeigten, daß, wenn die für 2 Kanten $e = vw, e' = v'w'$ mit $v, v' \in T_x, w, w' \in T_y$ definierten Ecken $z_e, z_{e'}$ vergleichbar wären, G einen Kreis der Länge $6d+3$ hätte. Dabei wird der Abstand von x nach v' und von y nach w' jeweils durch $2d$ abgeschätzt. Können wir diesen Abstand durch α abschätzen, so erhielten wir einen Kreis der Länge $2d + 2\alpha + 3$. Die Taillenweite wird im Beweis sonst nur benutzt, um zu zeigen, daß die Bäume T_x (bzw. die Hilfsbäume T'_x) induziert sind (für die Gleichung (3.3) und für (3.5) bei der Bedingung (B1)). Dazu aber reicht eine Taillenweite von $4d + 3$. Es ist aber $2d + 2\alpha + 4 \geq 4d + 3$.

In Kapitel 4 wird gezeigt, daß die Aufgabe, in einem Graphen eine Menge X mit den oben genannten Eigenschaften zu finden, NP-vollständig ist. Somit ist auch eine allgemeine (effiziente) Klassifzierung der Graphen, die eine solche Menge besitzen, nicht möglich (sofern $P \neq NP$).

Nach der Wahl von X und der Bildung der Bäume T_x wird im Beweis mittels der Ungleichungen (3.3) und (3.5) gezeigt, daß jeder Baum T_x zu 2^{d+1} vielen anderen Bäumen benachbart ist. Kann es überhaupt zwei Bäume T_x, T_y geben, deren innere Ecken mindestens Grad 3 besitzen, für die die Ungleichungen (3.3) und (3.5) mit Gleichheit erfüllt sind, ohne daß es einen Kreis zwischen T_x und T_y der Länge $\leq 6d + 4$ gibt? Im folgenden werden wir zwei derartige Bäume konstruieren und zeigen damit, daß in diesem Sinne (3.3) und (3.5) scharf sind. Mit H bezeichnen wir den Graphen, der aus diesen beiden Bäumen und den sie verbindenden Kanten besteht.

Die Bäume T_x und T_y sind dabei von der Art, wie sie in der Konstruktion des Beweises von Satz 3.6 auftreten können: alle Ecken $z \in H$ mit $d(x, z) \leq 2d$ (bzw. $d(y, z) \leq 2d$) gehören zu T_x (T_y). Damit T_x (3.3) mit Gleichheit erfüllt, müssen alle inneren Ecken von T_x den Grad 3 besitzen. Da T_x nur Blätter vom Abstand $2d$ von x enthält, reduziert sich dann die Ungleichung (3.5) zu

$$|A^{2d}_{x,y}| \leq |V^d_x| = 3 \cdot 2^{d-1}. \tag{3.6}$$

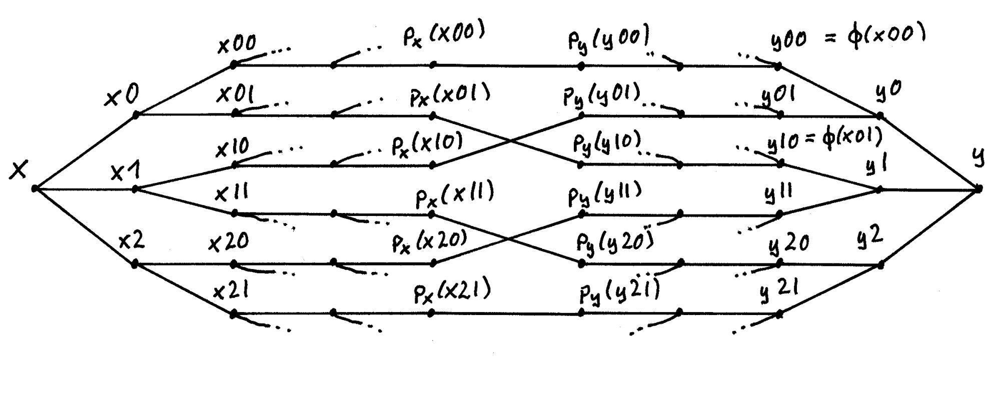
Eine einfache Möglichkeit H zu bilden, bestände darin, $d(y) = 3 \cdot 2^{d-1}$ zu setzen. Dann können wir eine Menge A von $3 \cdot 2^{d-1}$ Blättern in T_y auswählen, die jeweils nur y als gemeinsamen Vorfahren haben. In T_x gibt es eine Menge B von ebenfalls $3 \cdot 2^{d-1}$ Blättern, für die jede Ecke aus V^d_x genau einen Nachfolger in B hat. Verbinden wir jeweils paarweise Ecken aus A mit Ecken aus B, so hätte der kleinste Kreis in dem so erzeugten Graphen H die Länge $6d + 4$. Diese Konstruktion hätte den Nachteil, daß T_y eine sehr hohe Anzahl von Blättern besitzt und daher vielleicht zu vielen weiteren Bäumen benachbart sein müßte. Da es zudem auch interessant wäre, ob die Aussage von Satz 3.6 für 3-reguläre Graphen verbessert werden könnte, wollen wir eine Konstruktion angeben, in der die inneren Ecken von sowohl T_x als auch T_y jeweils Grad 3 haben.

Die Eckenmenge von T_x definieren wir mit $V(T_x) = \{(x)\} \cup \{\{x\} \times \{0,1,2\}\} \cup \{\{x\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}^i : i = 1, \ldots, 2d-1\}$. Dabei bezeichne $A \times B$ das kartesische Produkt $\{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ und A^i ist die Abkürzung von $A \overset{i-mal}{\times \ldots \times} A$. Für eine kompakte Schreibweise lassen wir Kommata und Klammern weg, kürzen also $(z_1, z_2, \ldots, z_i)$ zu $z_1 z_2 \ldots z_i$ ab (da z_i jeweils nur für eine Ziffer oder für x oder y steht, liegt hier keine Verwechslungsgefahr vor). Die Ecke $z_1 \ldots z_i \in V(T_x)$ mit $i \geq 2$ verbinden wir dann mit $z_1 \ldots z_{i-1}$. Analog definieren wir die Eckenmenge von T_y mit $V(T_y) = \{(x)\} \cup \{\{y\} \times \{0,1,2\}\} \cup \{\{y\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}^i : i = 1, \ldots, 2d-1\}$ und entsprechend auch die Kanten in T_y.

Zu jeder Ecke $x\, z_1 \ldots z_d$ mit Abstand d von x wählen wir einen Nachfolger $x\, z_1 \ldots z_d z_{d+1} \ldots z_{2d}$ vom Abstand $2d$ aus, den wir mit $p_x(x\, z_1 \ldots z_d)$ bezeichnen. Analog wählen wir zu jeder Ecke $y\, z_1 \ldots z_d$ mit Abstand d von y einen Nachfolger $p_y(y\, z_1 \ldots z_d)$ in T_y aus , der den Abstand $2d$ zu y hat. Um T_x und T_y zu verbinden, definieren wir eine Funktion ϕ, die jeder Ecke $x\, z_1 \ldots z_d$ mit Abstand d von x eine Ecke $\phi(x\, z_1 \ldots z_d) = y\, z'_1 \ldots z'_d$ in T_y zuordnet. Wir verbinden dann die Ecke $p_x(x\, z_1 \ldots z_d)$ mit $p_y(\phi(x\, z_1 \ldots z_d))$. Da es in T_x genau $3 \cdot 2^{d-1}$ viele Ecken vom Abstand d zu x gibt, ist somit (3.6) mit Gleichheit erfüllt. Mit $\phi(x\, z_1 \ldots z_d) = (y, \phi_1(x\, z_1 \ldots z_d), \ldots, \phi_d(x\, z_1 \ldots z_d))$ definieren wir $\phi_i(x\, z_1 \ldots z_d) = z_{d+1-i}$ für $i = 2, \ldots, d-1$. ϕ_1 und ϕ_d hängen nur von z_1, z_d ab und werden wie folgt definiert:

(ϕ_1, ϕ_d) :	$z_d =$ 0	1
$z_1 =$		
0	$(0,0)$	$(1,0)$
1	$(0,1)$	$(2,0)$
2	$(1,1)$	$(2,1)$

ϕ ist eine injektive Funktion: Angenommen $\phi(x\, z_1 \ldots z_d) = \phi(x\, z'_1 \ldots z'_d)$. Aus $\phi_i(x\, z_1 \ldots z_d) = z_{d+1-i} = z'_{d+1-i} = \phi_i(x\, z'_1 \ldots z'_d)$ für $i = 2, \ldots, d-1$ folgt $z_j = z'_j$ für $j = 2, \ldots, d-1$. Anhand der obigen Tabelle ist zu sehen, daß aus $\phi_1(x\, z_1 \ldots z_d) = \phi_1(x\, z'_1 \ldots z'_d)$ und $\phi_d(x\, z_1 \ldots z_d) = \phi_d(x\, z'_1 \ldots z'_d)$ schließlich $z_1 = z'_1$ und $z_d = z'_d$ folgt. Also ist ϕ injektiv.



Graph H, wenn $d = 2$ ist

Nachdem wir H definiert haben, kommen wir zum entscheidendenden Teil: dem Nachweis, daß in H alle Kreise mindestens die Länge $6d+4$ besitzen. Sei also C ein Kreis in H. C muß eine gerade Anzahl von Kanten benutzen, die zwischen T_x und T_y verlaufen. Sind es vier oder mehr, so hat C mindestens die Länge $8d$, da sowohl in T_x als auch T_y die Fußpunkte zweier solcher Kanten den Mindestabstand $2d$ haben. Nehmen wir also an, C benutzt zwei Kanten e, e' zwischen T_x und T_y. Die Fußpunkte dieser Kanten in T_x seien $p_x(a)$ und $p_x(b)$ mit $a = x\,\alpha_1 \ldots \alpha_d$ und $b = x\,\beta_1 \ldots \beta_d$. Nach Definition von H sind dann $p_y(\phi(a))$ und $p_y(\phi(b))$ die anderen Fußpunkte der beiden Kanten e, e'. Die Länge von C erhalten wir, indem wir in T_x und in T_y die Länge der Wege zwischen diesen Fußpunkten bestimmen.

Der in T_x eindeutig bestimmte Weg zwischen $p_x(a)$ und $p_x(b)$ setzt sich zusammen aus drei Wegen in T_x. Zwei Wege von $p_x(a)$ nach a und von $p_x(b)$ nach b (jeweils mit der Länge d) und einem Weg von a nach b. Der Weg von $x\,\alpha_1 \ldots \alpha_d$ nach $x\,\beta_1 \ldots \beta_d$ läuft über den ersten gemeinsamen Vorfahren den $x\,\alpha_1 \ldots \alpha_d$ und $x\,\beta_1 \ldots \beta_d$ besitzen. Dies aber ist nach Konstruktion gerade die Ecke $x\,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}$, wenn k die kleinste Zahl mit $\alpha_k \neq \beta_k$ ist. Im Fall $\alpha_1 \neq \beta_1$ ist die Wurzel x der kleinste gemeinsame Vorfahre. $p_x(a)$ und $p_x(b)$ sind somit durch einen Weg der Länge $2d + (d-(k-1)) + (d-(k-1)) = 4d - 2k + 2$ in T_x verbunden.

Um die Länge des Weges zwischen $p_y(\phi(a))$ und $p_y(\phi(b))$ in T_y zu erhalten, müssen wir ganz analog die kleinste Zahl l mit $\phi_l(a) \neq \phi_l(b)$ bestimmen. $p_y(\phi(a))$ und $p_y(\phi(b))$ sind dann in T_y durch einen Weg der Länge $4d - 2l + 2$ verbunden. Zusammen mit e, e' ist damit die Länge von C genau $8d + 6 - 2k - 2l$. Damit C mindestens die Länge $\geq 6d+4$ hat, muß daher $d + 1 - k \geq l$ sein. Ist $k \in \{2, \ldots, d-1\}$, so folgt aus $\alpha_k \neq \beta_k$ auch $\phi_{d+1-k}(a) = \alpha_{d+1-(d+1-k)} = \alpha_k \neq \beta_k = \beta_{d+1-(d+1-k)} = \phi_{d+1-k}(b)$. Also $l \leq d+1-k$. Ist $k = 1$, haben wir $l \leq d$ zu zeigen. Dies aber folgt aus der Injektivität der Abbildung ϕ. Ist $k = d$, so ist $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_d \neq \beta_d$. Wie aus der Tabelle oben ersichtlich, ist dann $\phi_1(a) \neq \phi_1(b)$.

Kapitel 4

k-dominierende, q-unabhängige Mengen

Mit dem Beweis von Satz 3.6 stellt sich die Frage, ob es in einem Graphen G eine Eckenmenge $X \subseteq V(G)$ gibt, so daß zum einen die Ecken aus X untereinander einen Abstand von mindestens $2d+1$ haben und zum anderen alle Ecken in G zu X einen kleineren Abstand als $2d$ besitzen. Wäre dies möglich, könnte man dadurch, wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde, die Schranke von Satz 3.6 verbessern. Allgemeiner läßt sich das Problem so formulieren: In einem Graphen G ist eine k-dominierende, q-unabhängige Menge X (kurz (k,q)-du-Menge) eine Eckenmenge $X \subseteq G$, so daß zum einen X eine k-dominierende Menge für G ist, also $d(X,x) \leq k$ für alle $x \in V(G)$ gilt und zum anderen X q-unabhängig ist, also $d(x,y) \geq q+1$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt.

Für welche Tupel (k,q) läßt sich in einem Graphen G immer eine (k,q)-du-Menge X finden? Gibt man eine maximale q-unabhängige Menge X vor, so ist X auch q-dominierend. Andernfalls gäbe es eine Ecke v im Graphen mit $d(X,v) > q$, womit $X \cup \{v\}$ ebenfalls q-dominierend wäre (dies nutzten wir bereits im Beweis von Satz 3.6 aus). Ist $k < q/2$, so kann es in einem zusammenhängenden Graphen keine (k,q)-du-Menge X mit $|X| > 1$ geben. Angenommen es gibt doch eine solche Menge X. Sei $x \in X$. Wegen $|X| > 1$ gibt es eine Ecke y mit $d(x,y) = \lceil q/2 \rceil$. Damit X k-dominierend ist, muß es ein $x' \in X, x' \neq x$, mit $d(x',y) \leq k$ geben. Dann aber ist $d(x,x') \leq \lceil q/2 \rceil + k \leq q$. Widerspruch! Offen ist also, wann es in einem Graphen (k,q)-du-Mengen mit $q/2 \leq k < q$ gibt. Wir werden zeigen, daß das zugehörige Entscheidungsproblem NP-schwer ist.

Zunächst aber geben wir an, was über das Problem bekannt ist. Dominierende Mengen wurden in den letzten Jahren intensiv untersucht (wie sich in den Sammelbänden [12, 13] zeigt). Varianten, die behandelt wurden, sind k-dominierende Mengen, deren Ecken unabhängig bzw. k-unabhängig sind (siehe auch den Überblicksartikel über „Distance domination" von Henning in [13]). Ein weiterer Spezialfall sind dominerende Mengen, deren Ecken 2-unabhängig sind (solche Mengen werden auch als effiziente dominierende Mengen oder perfekte Codes bezeichnet).

Eine natürliche Verallgemeinerung sind somit (k,q)-du-Mengen, die von Klostermeyer [14] eingeführt wurden. Smart und Slater [19] (siehe auch [12], Kapitel 4) zeigten, daß es NP-schwer ist, zu entscheiden, ob ein Graph eine $(1,2)$-du-Menge besitzt. Durch eine Erweiterung der Konstruktion von Smart und Slater zeigt Klostermeyer [14], daß das Problem auch im Fall von $(k,2k)$-du-Mengen NP-vollständig bleibt und stellt die Frage für den allgemeinen Fall.

Wir lösen dieses Problem mit Satz 4.2. Während es einfach ist, (k,q)-du-Mengen für $k = q$ zu finden, stellt sich heraus, daß das Problem in allen anderen Fällen ($q/2 \leq k < q$) NP-vollständig ist. Um das zu zeigen, werden wir es auf das NP-vollständige Problem 1-in-3 3SAT ohne negierte Variable (siehe [11]) zurückführen. Ein 1-in-3 3Sat Problem $\mathcal{S}$ (den Zusatz „ohne negierte Variable" lassen wir in Zukunft fort) hat als Eingabe n boolesche Variable $u_1,\ldots,u_n$ und m Klauseln $C_1,\ldots,C_m$ der Form $C_i = a_i \vee b_i \vee c_i$ mit $a_i, b_i, c_i \in \{u_1,\ldots,u_n\}$. Eine Lösung ist eine Belegung der Variablen $u_1,\ldots,u_n$ mit den Werten „wahr" oder „falsch" so daß jede Klausel genau eine Variable mit dem Wert „wahr" enthält.

Für die Reduktion von Entscheidungsproblemen auf bekannte NP-vollständige Probleme werden von Garey und Johnson [11] drei grundsätzliche Methoden herausgearbeitet. Wir werden hier durch „Komponenten-Design" zum Ziel kommen. Das heißt, wir werden jede Klausel C_i und jede Variable u_j einzeln durch Graphen ersetzen und geeignet verbinden, so daß die Wahl der Wertzuweisung in dem zu u_j gehörigen Graphen realisiert wird und durch den zu C_i gehörigen Graphen die Klauseln getestet werden.

Für die Konstruktion werden wir Sterngraphen benutzen, von deren Zentren $2r$ Wege mit den Längen $1,1,2,2\ldots,r,r$ ausgehen. Solche Graphen bezeichnen wir als ST^r-Graphen. Entscheidend wird folgende Eigenschaft sein:

Lemma 4.1. *Sei $k,q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < q$ und G ein Graph, der aus einem ST^k-Graphen S mit Zentrum z und einem (beliebigen) Graphen H bestehe, die nur die Ecke z gemeinsam haben. Ist X eine (k,q)-du-Menge von G, so folgt $z \in X$.*

Beweis. Angenommen $z \notin X$. Die Wege von S, die an z anliegen, bezeichnen wir mit $W_1,\ldots,W_k,W_1',\ldots,W_k'$. Dabei haben die Wege W_i und W_i' jeweils die Länge i. Die Endecken von W_i bzw. W_i' bezeichnen wir mit w_i bzw. w_i'. x_α sei eine Ecke aus X mit minimalen Abstand α zu z (der größer als 0 ist, da z selbst nicht zu X gehört).

1. Fall: $0 < \alpha \leq q/2$. Dann gibt es genau eine Ecke in X mit Abstand α von z (gäbe es zwei, hätten diese zueinander einen Abstand von höchstens $2\alpha \leq q$). Besteht X nur aus der Ecke x_α, so ist $X \cap W_k = \emptyset$ oder $X \cap W_k' = \emptyset$ und damit auch $d(X,w_k) > k$ oder $d(X,w_k') > k$. Widerspruch!

Es gibt also ein $y \in X \setminus \{x_\alpha\}$. Wegen $q+1 \leq d(x_\alpha,y) \leq d(x_\alpha,z) + d(z,y) \leq \alpha + d(z,y)$ muß $d(z,y) \geq q+1-\alpha$ sein. Mit $\beta := \min(\{d(z,x) : x \in X\} \setminus \{\alpha\})$ ist daher $\beta \geq q+1-\alpha \geq q/2+1 \geq 2$. $W_{\beta-1}$ bzw. $W_{\beta-1}'$ enthalten nur dann eine

Ecke aus X, wenn sie x_α enthalten. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $x_\alpha \notin W_{\beta-1}$ gilt. Dann haben wir

$$d(X, w_{\beta-1}) = d(x_\alpha, w_{\beta-1}) = \beta - 1 + \alpha \geq (q + 1 - \alpha) - 1 + \alpha = q > k.$$

Widerspruch!

2. Fall: $\alpha > q/2$. Dann enthält $W_{\alpha-1}$ keine Ecke aus X, und daher haben wir:

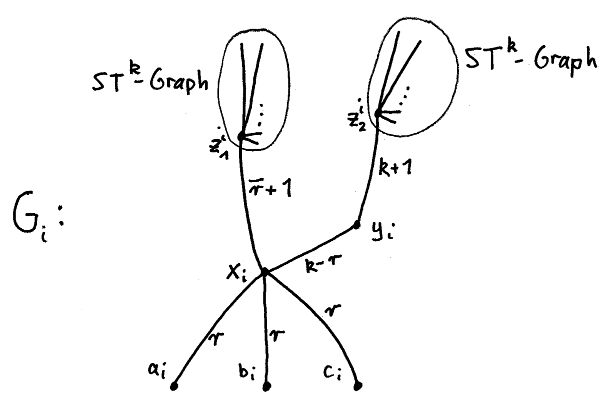
$$d(X, w_{\alpha-1}) = d(x_\alpha, w_{\alpha-1}) = \alpha - 1 + \alpha \geq 2\alpha - 1 \geq q > k.$$

Widerspruch! □

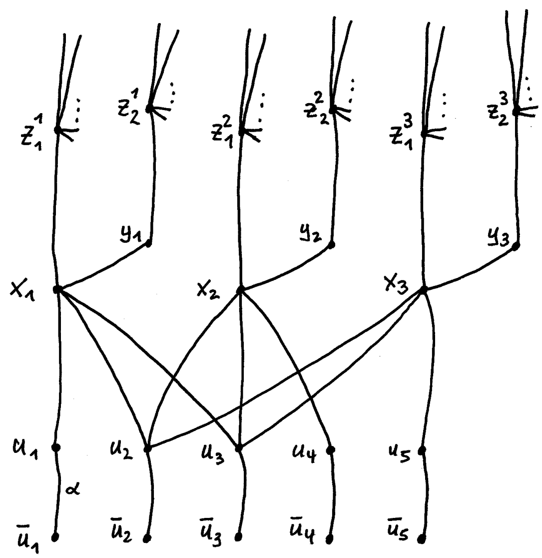
Satz 4.2. *Für $q/2 \leq k < q$ $(k, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ ist das Entscheidungsproblem „Hat G eine (k, q)-du-Menge?“ NP-vollständig.*

Beweis. Ist eine Menge $X \subseteq V(G)$ gegeben, so läßt sich in polynomieller Zeit prüfen, ob X eine (k, q)-du-Menge ist. Somit ist das Problem in NP. Um zu zeigen, daß es auch NP-vollständig ist, werden wir zu einem 1-in-3 3SAT Problem $\mathcal{S}$ einen Graphen $\mathcal{G}$ konstruieren, so daß $\mathcal{S}$ genau dann lösbar ist, wenn $\mathcal{G}$ eine (k, q)-du-Menge besitzt. Sei also $\mathcal{S}$, bestehend aus den Variablen $u_1, \ldots, u_n$ und den Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ mit $C_i = a_i \vee b_i \vee c_i$, gegeben. Für jede Variable u_i von $\mathcal{S}$ fügen wir in $\mathcal{G}$ zwei Ecken $u_i, \bar{u}_i$ hinzu, die durch einen Weg der Länge α verbunden sind, wobei $\alpha = 1$ ist, wenn q gerade ist, und $\alpha = 2$ andernfalls. Für jede Klausel C_i fügen wir einen Graphen G_i hinzu, der jeweils die Ecken a_i, b_i, c_i enthält.

Zur Konstruktion von G_i definieren wir $\bar{r} := \lceil q/2 \rceil$ und $r := \lfloor q/2 \rfloor$. G_i setzt sich zusammen aus zwei ST^k-Graphen H_1^i und H_2^i mit Zentren z_1^i, z_2^i und Ecken x_i, y_i und a_i, b_i, c_i, die wir wie folgt durch Wege miteinander verbinden wollen: jeweils ein Weg der Länge r von x nach a_i, b_i und c_i, ein Weg der Länge $\bar{r} + 1$ von x_i nach z_1^i, ein Weg der Länge $k - r$ von x_i nach y_i (im Fall $k = q/2$ entfällt der Weg und es ist $y_i = x_i$) und schließlich ein Weg der Länge $k + 1$ von y_i nach z_2^i.



Den durch diese Komponenten erzeugten Graphen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}$. Offenbar läßt sich $\mathcal{G}$ in polynomieller Zeit aus $\mathcal{S}$ gewinnen.



Beispiel: Graph $\mathcal{G}$, wenn $\mathcal{S}$ aus den Variablen $u_1, \ldots, u_5$ und den Klauseln $C_1 = u_1 \vee u_2 \vee u_3, C_2 = u_2 \vee u_3 \vee u_4, C_3 = u_2 \vee u_3 \vee u_5$ besteht.

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{G}$ genau dann eine (k, q)-du-Menge besitzt, wenn $\mathcal{S}$ eine Lösung besitzt.

1. $\mathcal{G}$ besitzt eine (k, q)-du-Menge X Dann ist nach Lemma 4.1 $z_1^i, z_2^i \in X (i = 1, \ldots, m)$.

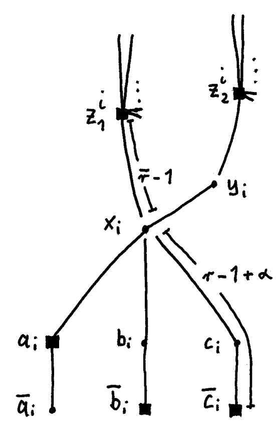
Es ist $d(y_i, z_1^i) = \bar{r} + 1 + k - r \geq k + 1$ und $d(y_i, z_2^i) = k + 1$. Eine Ecke, die zu y_i höchstens den Abstand k besitzt, kann nicht außerhalb von G_i liegen, da bereits a_i, b_i und c_i einen Abstand von k zu y_i besitzen. a_i, b_i und c_i haben zu z_1^i den Abstand $r + \bar{r} + 1 = \lfloor q/2 \rfloor + \lceil q/2 \rceil + 1 = q + 1$ und zu z_2^i den Abstand $r + (k - r) + (k + 1) = 2k + 1 \geq q + 1$. Damit sind sie die einzigen Ecken in G_i, die zu z_1^i und z_2^i einen Abstand von mindestens $q + 1$ besitzen. Also ist $X \cap \{a_i, b_i, c_i\} \neq \emptyset$. Da aber a_i, b_i, c_i untereinander den Abstand $2r \leq q$ haben, ist $|X \cap \{a_i, b_i, c_i\}| = 1$. Somit erhalten wir eine Lösung von $\mathcal{S}$, indem wir den Variablen u_i, die in X liegen, den Wert „wahr“ zuordnen und den anderen den Wert „falsch“.

2. $\mathcal{S}$ ist lösbar Sei eine Lösung von S gegeben. Wir definieren $W := \{u_i : u_i$ besitzt den Wert „wahr“$\}$ und $\bar{W} := \{\bar{u}_i : u_i$ besitzt den Wert „falsch“$\}$. Dann setzen wir $X = W \cup \bar{W} \cup \{z_1^1, \ldots, z_1^m\} \cup \{z_2^1, \ldots, z_2^m\}$ und zeigen, daß X eine (k, q)-du-Menge von $\mathcal{G}$ ist.

Zuerst prüfen wir, daß X q-unabhängig ist, also $d(x,x') > q$ für $x, x' \in X$ gilt. Sind $x, x' \in W$, so kommen sie nach Voraussetzung nicht gemeinsam in einer Klausel vor, und es ist $d(x,x') > q$ nach Konstruktion von $\mathcal{G}$. Sind $x, x' \in W \cup \bar{W}$ und gehört x oder x' zu $\bar{W}$, so haben wir $d(x,x') \geq 2r + \alpha = q + 1$. Bleibt zuletzt der Fall, daß x oder x' vom Typ z_j^i ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $x = z_j^i$ ist. Dann haben die Ecken aus G_i, die für x' in Frage kommen, bereits einen Abstand von $\bar{r} + 1 + (k - r) + (k + 1) \geq 2k + 2 \geq q + 2$ bzw. $\bar{r} + r + 1 = q + 1$ zu x. Somit ist X q-unabhängig.

X ist auch k-dominierend: Da entweder $u_i \in X$ oder $\bar{u}_i \in X$ ist, gilt für jede Ecke v des Weges zwischen u_i und $\bar{u}_i$ $d(X,v) \leq \alpha \leq k$. Bleibt somit zu prüfen, ob für jede Ecke $v \in V(G_i) \setminus \{a_i, b_i, c_i\}$ ebenfalls $d(X,v) \leq k$ gilt. Ohne Einschränkung sei $a_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i \in X$. Dann ist $d(a_i, y_i) = r + (k - r) = k$, also ist $d(a_i, v) \leq k$, wenn v eine Ecke des Weges zischen a_i und y_i ist. Die Ecken der zwei Wege zwischen x_i und b_i und zwischen x_i und c_i haben, bis auf die Ecke x_i selbst, höchstens den Abstand $r - 1 + \alpha$ zu $\bar{b}_i$ oder $\bar{c}_i$. Ist q gerade, so ist $r - 1 + \alpha = q/2 \leq k$ und ist q ungerade, so ist $r - 1 + \alpha = (q-1)/2 - 1 + 2 = (q+1)/2 = \lceil q/2 \rceil \leq k$. Da die restlichen Ecken von G_i höchstens den Abstand k zu z_i^1 oder z_i^2 besitzen, ist somit X k-dominierend.

Da die hier angegebenen Abschätzungen jeder Ecke v von G_i eine Ecke $x \in X$ zuordnen mit $d(x,v) \leq k$, können wir die Zuordnung verdeutlichen, indem wir G_i durch Entfernen von 4 Kanten in die entsprechenden Komponenten aufteilen.



Aufteilung von G_i in Komponenten, für die X k-dominierend bleibt.

□

Literaturverzeichnis

[1] Alon, Noga; Seymour, Paul; Thomas, Robin **A separator theorem for nonplanar graphs** J. Am. Math. Soc. 3, No.4, 801–808 (1990).

[2] Biggs, Norman **Constructions for cubic graphs with large girth** Electron. J. Comb. 5, Article A1, 25 p. (1998); printed version J. Comb. 5, 1–25 (1998).

[3] Biggs, Norman; Hoare, M. J. **The sextet construction for cubic graphs** Combinatorica 3, 153–165 (1983).

[4] Bollobás, Béla **Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods** Reg. Conf. Ser. Math. 62, 64 S. (1986).

[5] Bollobás, Béla **Chromatic Number, girth and maximal degree** Discrete Mathematics 24, 311–314 (1978).

[6] Bollobás, Béla **Extremal graph theory** Academic Press, London u. a., 488 S. (1978).

[7] Bollobás, Béla; Leader, Imre **Compressions and isoperimetric inequalities** J. Comb. Theory, Ser. A 56, No.1, 47–62 (1991).

[8] Brandt, Stephan **Hamiltonian cycles in expanding graphs** Manuskript (1999).

[9] Bray, John; Parker, Christopher; Rowley, Peter **Cayley type graphs and cubic graphs of large girth** Discrete Math. 214, No.1–3, 113–121 (2000).

[10] Diestel, Reinhard **Graphentheorie** Springer, Berlin u. a., 314 S. (2000).

[11] Garey, Michael; Johnson, David **Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness**, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 340 S. (1979).

[12] Haynes, Teresa W.; Hedetniemi, Stephen T.; Slater, Peter J. **Fundamentals of domination in graphs** Marcel Dekker, New York u. a., 446 S. (1998).

[13] Haynes, Teresa W.(ed.); Hedetniemi, Stephen T.(ed.); Slater, Peter J.(ed.) **Domination in graphs. Advanced topics** Marcel Dekker, New York u. a., 487 S. (1998).

[14] Klostermeyer, William **On k-dominating, q-independent sets** Bull. Inst. Comb. Appl. 27, 26–36 (1999).

[15] Komlós,Janos; Szemerédi, Endre **Topological cliques in graphs** Combinatorics, Probability and Computing 3, 247–256 (1994).

[16] Kostochka, A.V. **Lower bound of the Hadwiger number of graphs by their average degree** Combinatorica 4, 307–316 (1984).

[17] Royle, G. **Cubic cages** Web document http://www.cs.uwa.edu.au:80/ gordon/cages (2000).

[18] Sauer, N. **Extremaleigenschaften regulärer Graphen gegebener Taillenweite** I und II, Sitzungsberichte Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl., S-B II, 176 (1967) 9–25, ibid 176 (1967) 27–43.

[19] Smart, C.B.; Slater, P.J. **Complexity results for closed neighborhood order parameters** Congr. Numer.,112, 83–96 (1995).

[20] Thomason, Andrew **An extremal function for contractions of graphs** Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 95, 261–265 (1984).

[21] Thomassen, Carsten **Girth in Graphs**, J. Comb. Theory, Ser. B 35, 129–141 (1983).

[22] Weiss, A. **Girths of bipartite sextet graphs** Combinatorica 4, 241–245 (1984).

Zusammenfassung

Die Arbeit teilt sich in drei Teile auf. Im ersten Teil wird eine Verallgemeinerung des Zusammenhangsbegriffs, der f-Zusammenhang eingeführt. Der f-Zusammenhang hängt von einer Funktion $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ ab. Je stärker f wächst, um so größer ist der Zusammenhang im Graphen. Als zentraler Satz wird gezeigt, daß ein f-zusammenhängender Teilgraph der Ordnung m (für eine Funktion f mit $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$) in jedem Graphen mit Durchschnittsgrad mindestens $2m$ enthalten ist.

Im zweiten Teil wird gezeigt, daß ein Graph mit Taillenweite mindestens $6\lceil \log(k/2)\rceil + 4$ und Minimalgrad mindestens 3 einen Minor mit Minimalgrad mindestens k enthält. Dies stellt eine Verbesserung eines Satzes von Thomassen dar. Als Folgerung daraus erhält man, daß ein Graph mit Minimalgrad mindestens 3 und Taillenweite mindestens $6\lceil \log r + \frac{1}{2}\log\log r\rceil + c$ einen K^r-Minor enthält.

Im letzten Teil schließlich werden k-dominierende, q-unabhängige Mengen untersucht – ein Thema, das sich aus dem zweiten Teil ergibt. Klostermeyer stellte die Frage nach der Komplexität des Problems, ob ein Graph eine k-dominierende, q-unabhängige Menge besitzt und zeigte, daß es für einen Spezialfall NP-vollständig ist. Dieses Problem wird in der Arbeit gelöst; es stellt sich heraus, daß es in allen nicht-trivialen Fällen NP-vollständig ist.

Lebenslauf

Christof Rempel
geboren am 01.03.1968 in Hamburg

Studium

1997–2001	Promotionsstudium im Fach Mathematik an der Universität Hamburg
1992–1997	Mathematik an der Universität Hamburg, Abschluß Diplom
1991–1992	Mathematik und künstliche Intelligenz an der University of Edinburgh
1989–1991	Mathematik und Physik (Studiengang Lehramt für die Oberstufe) an der Universität Hamburg

Berufliche Tätigkeiten

1997–2000	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
1993–1996	Übungsgruppenleiter und Tutor für Mathematik an der Universität Hamburg

Zivildienst

1987–1989	Club 68 in Hamburg

Schule

1979–1987	Gymnasium Buckhorn in Hamburg, Abitur
1974–1979	Grundschule Bergstedt in Hamburg